TC. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINI NO: 1941
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINI NO: 1022

SEMBOLİK MANTIK

Yazar
Yard.Doç.Dr. İskender TAŞDELEN

Editör
Yard.Doç.Dr. Demet TAŞDELEN

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

UZAKTAN ÖĞRETİM TASARIM BİRİMİ

Genel Koordinatör
Prof.Dr. Levend Kılıç

Genel Koordinatör Yardımcısı
Doç.Dr. Müjgan Bozkaya

Öğretim Tasarımcısı
Yard.Doç.Dr. Alper Tolga Kumtepe

Grafik Tasarım Yönetmenleri
Prof. Tevfik Fikret Uçar
Öğr.Gör. Cemalettin Yıldız
Öğr.Gör. Nilgün Salur

Ölçme Değerlendirme Sorumlusu
Uzm. Bülent Gezen

Kitap Koordinasyon Birimi
Yard.Doç.Dr. Feyyaz Bodur
Uzm. Nermin Özgür

Kapak Düzeni
Prof. Tevfik Fikret Uçar

Dizgi
Açıköğretim Fakültesi Dizgi Ekibi

Sembolik Mantık

ISBN
978-975-06-0630-4

1. Baskı

Bu kitap ANADOLU ÜNİVERSİTESİ Web-Ofset Tesislerinde 3.500 adet basılmıştır.
ESKİŞEHİR, Ağustos 2009

İçindekiler

4. ÜNİTE

5. ÜNİTE

6. ÜNİTE

Önsöz

Mantık, kurucusu olan ve bu alanda ilk kapsamlı çalışmayı ortaya koyan Aristoteles'ten itibaren felsefenin aracı olarak kabul edilir. Bu kitapta ele alacağımız temel mantık, düzgün akıl yürütmenin en temel ilkelerini ortaya koymakta ve akıl yürütmelerimizin düzgün olup olmadığını denetleyebilmemizi sağlayan yöntemler sunmaktadır. Bilimlerin hatta duyularımızın sağladığı "bilgileri" sorgulamak felsefenin temel işlevlerinden biri olduğundan ve sorgulama ancak düzgün akıl yürütme ile gerçekleştirilebileceğinden, düzgün akıl yürütmeleri konu alan mantık gerçekten de felsefenin vazgeçilmez aracıdır. Her uğraşıda olduğu gibi felsefede de başarılı olmak için, uygun araçlara sahip olmak ve o araçları beceri ile kullanmak gereklidir. Dolayısıyla felsefe öğrenmeyi ve felsefi düşünmeyi amaçlayan her insanın sağlam bir mantık bilgisine sahip olması gereklidir.

Bu kitapta, önermeler mantığı ve niceleme mantığının temelleri, öğrencinin kendi çalışmasıyla öğrenebileceği bir biçimde sunulmuştur. Her ünitede, temel kavramlar tanımlanmakta ve temel teknikler betimlenmekte, ardından bu temel kavramlar ve teknikler örneklerle açıklanmaktadır. Tanım ve örnekleri dikkatle inceleyiniz ve çözülmüş örnekleri sonra bir de kendiniz çözerek, çözümünüzü kitaptakiyle karşılaştırınız. Kitapta konu içinde yer alan diğer soruları ve konu sonundaki testleri çözünüz. Her konu için, kendiniz de kolaylıkla kitaptaki örnek ve sorulardakine benzer alıştırmalar üreterek çözebilirsiniz. Matematik gibi mantık da yaparak öğrenilir. Bu nedenle bolca soru çözmek mantığı öğrenmenin en sağlam yoludur.

Uzaktan öğretim tekniğine uygun olarak oluşturulmuş ve sembolik mantığın en temel konularını ele alan Sembolik Mantık kitabını büyük bir titizlikle hazırlamış olan kitabın yazarı Anadolu Üniversitesi Felsefe Bölümü öğretim üyesi Yard. Doç. Dr. İskender Taşdelen'e teşekkürlerimi sunar, siz sevgili öğrencilerimizin mantığı severek öğrenmenizi ve başarılı olmanızı dilerim.

Editör
Yard. Doç. Dr. Demet Taşdelen
Eskişehir, 2009

SEMBOLİK MANTIK

1

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Mantığın konusunu ve amacını açıklayabilecek,
- Mantığın temel kavramlarını açıklayabilecek,
- Mantıkta sembolleştirmenin işlevini ve yararını açıklayabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Akıl yürütme
- Önerme
- Çıkarım
- Tümdengelim
- Tümevarım
- Heptengitme
- Geçerlilik
- Tutarlılık

İçerik Haritası

Sembolik Mantık

Mantığın Temel Kavramları

- GİRİŞ
- MANTIĞIN KONUSU VE AMACI
- MANTIĞIN TEMEL KAVRAMLARI
- MANTIKTA SEMBOLLEŞTİRME

Mantığın Temel Kavramları

GİRİŞ

Mantık *düzgün akıl yürütme kurallarının bilimi*, felsefe ise, genel olarak, *temel gerçeklerin akla dayalı araştırması* olarak tanımlanır. Felsefe etkinliği, sadece yaratıcı düşünme yoluyla gerçekliği açıkladığı düşünülen iddialar ileri sürmeyi değil, daha da önemlisi, bu iddiaları güçlü akıl yürütmelerle desteklemeyi gerektirir. Felsefi bir iddia, ne denli ilgi çekici olursa olsun, ancak onun için sağlanan gerekçelendirmenin gücü ölçüsünde kabul görür. Bu nedenle, akıl yürütmeleri konu alan mantık felsefenin vazgeçilmez aracıdır.

Mantık bilgisinden sadece felsefede değil, diğer tüm bilim ve araştırma alanlarında ve gündelik yaşamda faydalanırız. Mantık kurallarını hatasız kullandığımızda, mevcut bilgilerimizden doğru sonuçlar çıkardığımıza emin olabiliriz. Ayrıca, mantık bilgisi konuşma ve düşünmemizde tutarsız olmamızı engeller. Mantık bilgisi sayesinde, okuduğumuz bir yazıda veya bir kişinin söylediklerinde, bir iddia düzgün olmayan bir biçimde savunuluyorsa, bunu anlayıp ortaya çıkarabiliriz. Dolayısıyla, eleştirel düşünme için mantık bilgisi gereklidir. Mantık öğrenmek geçerlilik, tutarlılık gibi soyut kavramlarla düşünmeyi gerektirdiğinden, mantık öğrenimi sırasında soyut düşünme yeteneği de gelişir.

Bu ünitede, mantığın konusunun ve amacının ne olduğuna, en temel mantık kavramlarına, akıl yürütme biçimlerine ve son olarak sembolleştirmenin akıl yürütmeleri çözümlemedeki işlevine değineceğiz.

MANTIĞIN KONUSU VE AMACI

İnsanların uzun bir süre bir etkinlikte bulunup, ancak bu etkinlikle ilgili problemler ortaya çıktığında, bu etkinliğin doğası ve kuralları üzerine düşünmeleri, genel kural sayılabilecek kadar çok görülmüştür. Örneğin, gündelik yaşam gereksinimlerini karşılamak için yüzyıllarca alan hesaplayan, denklem çözen insanlar, bu konulardaki birikimlerinin hatırı sayılır seviyeye ulaşması ve matematik öğretiminin zorlaşması sonucunda, bildiğimiz kadarıyla, ancak Öklid'den (M.Ö. 3. yy.) itibaren matematiği kurallı bir biçimde yapmaya ve öğretmeye giriştiler.

Matematiksel düşünme için geçerli olan bu durum, aslında tüm düşünme için geçerlidir. Sistemli düşünme ile ilgili bir bilim olan mantık ortaya çıkmadan önce de insanlar düşünmekteydi. Hatta, felsefeci Parmenides (M.Ö. 5. yy.) örneğinde görüldüğü gibi, felsefi düşünme soyut kavramlar hakkında sistemli düşünme düzeyine ulaşmıştı. Düşüncenin bu denli ileri noktalara uzanması, çözülmesi güç düşünsel sorunları tartışmayı da olanaklı hale getirdi. Mantık biliminin kurucusu olan Aristoteles'in de (M.Ö. 384 - M.Ö. 322) haberdar olduğu yalancı paradoksu bu sorunlardan biridir. Özgün *yalancı paradoksunun* bir benzerini ele alalım. Aşağıdaki tümcenin doğru olup olmadığını düşünün:

Bu tümce yanlıştır.

Mantık bilimi düşünmede ortaya çıkan paradoks ve çelişkilerden kaçınmak, tartışmalarda üstün gelen taraf olmanın yöntemlerini geliştirmek isteğinden doğmuştur.

Bu tümcenin doğru olduğunu kabul edelim: Bu durumda tümcenin söylediği şey, bu tümcenin yanlış olduğu, doğrudur. Demek ki, tümce yanlıştır. Şimdi de, tümcenin yanlış olduğunu kabul edelim: O zaman, zaten tümcenin de söylediği bu olduğundan, tümce doğrudur. Yani, görünüşte doğru veya yanlış bir yargı bildiren bu tümce doğru ise yanlış, yanlış ise doğrudur. İçinden çıkılması zor bir durum! İşte, düşüncenin ulaştığı bu ve benzeri bilmecelerle karşı karşıya kalan felsefeciler, *düşünme üzerine düşünmek*, düşünmeyi ve söz söylemeyi kurallı hale getirmek gereğini duydular. Buna devlet yönetimi gibi pratik konularda çıkan ateşli tartışmalarda üstün gelme isteği de eklenince mantık biliminin gelişmesi için gereken şartlar oluşmuş oldu.

Akıl yürütmek, birtakım doğrulardan veya kabullerden hareket ederek, bir sonuca varmak demektir.

Mantığın konusu *akıl yürütme* dediğimiz düşünme biçimidir. Bildiğiniz gibi, hayal kurmak ve plan yapmak gibi diğer düşünme türleri de vardır ancak bu düşünme türleri, mantığın doğrudan konusunu oluşturmazlar. Akıl yürütmek, birtakım doğrulardan veya kabullerden hareket ederek, bir sonuca varmak demektir. Doğru kabullerden hareket etmek kadar, akıl yürütmelerimizi düzgün gerçekleştirmeye de dikkat etmemiz hem günlük yaşantıda hem de bilimde oldukça önemlidir.

Bir akıl yürütmenin başlangıcındaki kabullerimizin yanlış olması, bizi yanlış bir sonuca götürebilir. Örneğin, gideceğimiz yoldaki trafiğin her zamanki gibi olacağını kabul ederek, bir arkadaşımıza bir saat sonra buluşabileceğimizi bildirdiğimizi kabul edelim. Oysa ki, bakım çalışması nedeniyle, gideceğimiz yolun büyük kısmı tek şeride inmiş olsun. Bu durumda, arkadaşımızla söz verdiğimiz saatte buluşamayabiliriz. Böyle olursa, yanlış bir kabulden hareket ettiğimiz için, yanlış sonuca varmış oluruz. Örnekten de anlaşılacağı gibi, bir akıl yürütmenin başlangıcındaki kabullerimizin doğru olup olmadığını ortaya çıkarmak mantığın görevi değildir.

Mantık bakımından, akıl yürütme yanlışlarının asıl önemli nedeni, başvurulan akıl yürütme *biçiminin* düzgün olmamasıdır. Düzgün olmayan bir akıl yürütme biçimine başvurduğumuzda, başlangıç kabullerimiz doğru olsa bile kolaylıkla yanlış bir sonuca varabiliriz. Gündelik yaşamımızda düzgün akıl yürütmemenin sonucunda, örneğin, bir arkadaşımızı haksız olarak suçlayabilir ya da oldukça fazla emek harcanan bir işin sonunda başarısız olabiliriz. Bilimden de basit bir örnek vermek gerekirse, insanlar yüzyıllar boyu aynı dünyada yaşayıp, aynı gökyüzünü gözlemledikleri halde, yanlış olarak, dünyanın evrenin merkezinde olduğuna, güneşin ve tüm yıldızların dünyanın etrafında döndüğüne vbg. inandılar. Farklı hiçbir gözlemde bulunma imkanı olmayan ve aynı akıl yürütme kurallarına sahip olan Nicolaus Copernicus (1473-1543) ise, aynı gözlemlerden yola çıkarak, dünyanın ve diğer gezegenlerin güneş etrafında döndüğü sonucuna ulaştı.

Mantığın konusu akıl yürütmeler, amacı ise düzgün akıl yürütme biçimlerini ortaya koymak ve akıl yürütmeleri denetlememizi sağlayacak yöntemler geliştirmektir.

Mantığın birinci amacı düzgün akıl yürütme biçimlerini belirlemektir. Düzgün akıl yürütmelere başvurmaya çalışmak, bu akıl yürütmeler, doğru kabullerden hareket ettiğimizde, ulaştığımız sonucun kesin olarak doğru, ya da yüksek olasılıkla doğru olmasını sağladıkları için önemlidir. Buna göre, "mantıklı düşünmek" mantığın ortaya koyduğu düzgün akıl yürütme biçimlerine uygun olarak düşünmek demektir. Düzgün akıl yürütme biçimlerinin belirlenmesinin ardından, mantığın ikinci amacı, akıl yürütmelerin bu akıl yürütme biçimlerine uygun olup olmadığını denetleyecek yöntemler geliştirmektir. Mantığa başvurarak gerçeklik hakkındaki bilgimizi genişletebilmemiz, bu iki temel amacın gerçekleşmesine bağlıdır.

MANTIĞIN TEMEL KAVRAMLARI

Önerme

Akıl yürütmenin doğrulardan ya da kabullerden hareket ederek sonuç çıkarmak olduğunu söylemiştik. Ancak neler için "doğru" ya da "yanlış" diyebileceğimizi, dolayısıyla akıl yürütmelerin nelerden oluştuğunu belirlemedik. Mantıkta "doğru" ve "yanlış" değerleri "doğruluk değerleri" olarak, doğruluk değeri alan şeyler ise "önerme" olarak adlandırılır. Akıl yürütmeler önermelerden oluştuğuna göre, "önerme" kavramının tanımlanması mantık bakımından önemlidir.

Bildiğiniz gibi, en temel tümce türleri, bildirsel tümceler (bildirme tümceleri), soru tümceleri, emir tümceleri ve ünlem tümceleridir. Bir yargı bildirmek amacı ile kurulan tümcelere bildirsel tümce veya bildirme tümcesi, bir konuda bilgi edinmek amacıyla kurulan tümcelere soru tümcesi, birinin bir eylemi gerçekleştirmesini buyurmak için kurulan tümcelere emir tümcesi, bir dileği ya da duyguyu bildiren tümcelere ünlem tümcesi denir.

ÖRNEK

"Bugün yağmur yağacak" bir bildirsel tümce, "Bugün yağmur yağacak mı?" bir soru tümcesi, "Bugün yağmur yağıp yağmayacağını söyle" bir emir tümcesi, "Eyvah, bugün yağmur yağacakmış!" bir ünlem tümcesidir.

Anlamlı olan ve kesin bir yargı bildiren tümcelere önerme denir. Akıl yürütmeler önermelerden kuruludur.

Tanım: Önerme anlamlı ve kesin yargı bildiren bildirsel tümcedir.

ÖRNEK

Aşağıdaki tümceler birer önermedir.

1. Eskişehir Türkiye'nin en kalabalık kentidir.
2. 2+2=5
3. Phobos ve Deimos, Mars gezegeninin iki doğal uydusudur.
4. Her doğal sayı ya çift ya da tek sayıdır.

Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasını da şu şekilde tanımlıyoruz: Önermenin bildirdiği yargı gerçeklikle uyuşuyorsa önerme doğru, aksi takdirde önerme yanlıştır. Örneğimizdeki ilk iki önerme 'yanlış' doğruluk değerini; son iki önerme ise 'doğru' doğruluk değerini almaktadır.

Bir tümcenin önerme olması için o tümcenin doğru mu yanlış mı olduğunu bilmemiz gerekmez. Aksine, genellikle önce tümcenin bir yargı bildirdiğini anlar ve, dolayısıyla, bir önerme olduğuna karar verir, ardından da doğruluğuna/yanlışlığına karar veririz.

ÖRNEK

Örneğin, şu anda "Türkiye'nin şu andaki nüfusu 70 milyon 586 bindir." tümcesinin, doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu bilmesem de, bu tümcenin bir önerme olduğunu, bir yargı bildirdiğini biliyorum. Yıllar boyu doğruluğuna veya yanlışlığına karar verilememiş önermeler vardır. Örneğin, kimi matematik önermeleri ileri sürüldükten yıllar sonra kanıtlanabilmiştir. "Evrende dünyamızın dışında da hayat vardır." tümcesi de doğruluk değerini bilmediğimiz bir önermedir.

Bir tümcenin önerme olabilmesi için içinde geçen sözcüklerin anlamlarının açık olması, ve bu sözcüklerin bir arada açık bir yargı bildirmesi gerekir.

ÖRNEK

"Haftanın en kırmızı günü salıdır" sözcük dizisi görünüşte bir önerme olmasına rağmen, anlaşılır hiçbir yargı bildirmediğinden önerme sayılamaz.

Kimi durumlarda, bir ifadeyi, örneğin bir önermeyi, tırnak içinde aldığımıza dikkat ederek, bunun nedenini soruyor olabilirsiniz: Bir ifadenin *kullanılması* durumunda bu ifade tırnak içine alınmadan yazılır, bir ifadeden *söz edilmesi* durumunda ise ifade tırnak içine alınır. Örneklere başvurarak bu ayırımı kolayca açıklayabiliriz:

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri ele alalım:
1. Ayşe bir öğrencidir.
2. "Ayşe" dört harflidir.
3. "Ayşe" bir öğrencidir.
4. Ayşe dört harflidir.

İlk ifade Ayşe hakkında bir önermedir. Ayşe gerçekten bir öğrenci ise önerme doğru, değil ise önerme yanlıştır. İkinci ifade ise bir sözcük hakkında, doğru bir önermedir. Üçüncü ve dördüncü ifadeler anlamsız ifadelerdir: Üçüncü ifadede bir sözcüğün öğrenci olduğu ileri sürülmekte, dördüncüde ise bir kişinin dört harfli olduğu ileri sürülmektedir.

ÖRNEK

Bir ifadenin kullanılması ile bir ifadeden söz edilmesi arasındaki ayırıma göre aşağıdaki tümceleri değerlendirelim:
1. Ali Aliye'den kısadır.
2. "Ali" sözcüğü "Aliye" sözcüğünden kısadır.

Birinci tümce Ali ve Aliye'nin boylarının ne olduğuna göre doğru ya da yanlış olabilen bir önermedir. Bu önermede "Ali" ve "Aliye" sözcükleri Ali ve Aliye'den söz etmek için kullanılmıştır. İkinci tümce ise Ali ve Aliye hakkında değil "Ali" ve "Aliye" sözcükleri hakkında doğru bir önermedir. Bu önermede "Ali" ve "Aliye" sözcüklerinin Ali ve Aliye hakkında konuşmak için kullanılması söz konusu değildir.

Sonraki ünitelerdeki tanımlarda ihtiyaç duyacağımız bir başka önemli ayırım da, *ifade tipi* ve *ifade örneği* ayırımıdır. Şimdi yazdığımız "ANKARA" sözcüğünde kaç harf olduğunu soralım. Bu soru iki şekilde yanıtlanabilir. Bu sözcüğün "A", "N", "K", "A", "R" ve "A" harfleri olmak üzere altı harften oluştuğunu söyleyebildiğimiz gibi, "A", "N", "K", "R" harfleri olmak üzere dört harften oluştuğunu söyleyebiliriz. Birinci yanıtta harf ile *harf örneği*ni, ikincisinde ise *harf tipi*ni kastediyoruz. Bir başka deyişle, "ANKARA" sözcüğünde "A" harf tipinin üç örneği, "N", "K" ve "R" harf tiplerinin ise birer örneği olduğunu söyleyeceğiz. Harf için söylediklerimiz, diğer işaretler ve ifadeler için de söylenebilir. "Ali'nin babasının adı da Ali idi." tümcesinde "Ali" sözcük tipinin iki örneği vardır.

Bir x ifade tipinin bir y ifadesindeki her örneği *x'in y'de bir geçişi* olarak adlandırılır. Dolayısıyla, "A" harfinin "ANKARA" sözcüğünde üç kere, "Ali" sözcüğünün "Ali'nin babasının adı da Ali idi." tümcesinde iki kere geçtiğini söyleriz. Bu sayede, bir ifadedeki her bir ifade örneği hakkında konuşmamız mümkün olur. Örneğin, "A" harfinin "ANKARA" sözcüğündeki birinci, ikinci ve üçüncü geçişinden bahsettiğimizde, en soldaki geçişin birinci geçişi, ortadakinin ikinci, en sağdakinin de üçüncü geçişi olduğunu söyleyeceğiz.

Çıkarım

Bu ünitenin başında, mantığın konusunun akıl yürütmeler olduğunu, mantığın amacının da düzgün akıl yürütme biçimlerini ortaya koymak ve akıl yürütmelerin düzgün akıl yürütme biçimlerine uygunluğunu denetlememizi sağlayacak yöntemler geliştirmek olduğunu belirtmiştik. Bu söylediklerimizi daha açık ifade edebilmek ve tartışabilmek için "akıl yürütme" kavramının yerine daha açık bir kavram olan "çıkarım" kavramını tanımlayıp kullanacağız. Bunun için de, az önce değindiğimiz "önerme" kavramına başvuracağız.

Tanım: Bir veya daha fazla sayıda önermeden hareketle bir başka önermeye ulaşmak bir *çıkarımda bulunmak*tır. Bir çıkarımda bulunduğumuzda ulaştığımız önerme *sonuç* önermesi, sonuç önermesine ulaşmak için başlangıç noktası olarak aldığımız önermeler *öncül önermeler* veya kısaca *öncüller*dir. Öncül önermeleri ve sonuçtan oluşan önerme dizisi bir *çıkarım*dır. Bir dizi önermenin bir çıkarım olduğunu, öncül önermeleri ile sonuç önermesi arasına konan "o halde", "öyleyse", "demek ki", "dolayısıyla" gibi ifadelerle belirtiriz. Bir çıkarımın *standart biçimi* aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

"Öncül önermeler" adını alan bir grup önerme ve bir sonuç önermesinden oluşan önerme dizisine "çıkarım" denir. Çıkarımın öncülleri ve sonuç önermesi "o halde", "demek ki" gibi sözcüklerle ayrılır.

Birinci öncül
İkinci öncül
...
Sonuncu öncül
____
O halde, Sonuç önermesi

Biz bu kitapta, genellikle, çıkarımları standart biçim yerine doğrusal biçimde yazacağız. Doğrusal biçime göre yazıldığında, bir çıkarımın gösterimi aşağıdaki gibidir:

Birinci öncül, İkinci öncül,..., Sonuncu öncül. O halde, Sonuç önermesi.

ÖRNEK

"Ali bugün çok hasta. Demek ki, Ali bugün okula gelemeyecek." ve "Bir ülkedeki hızlı nüfus artışı kamu hizmetlerinin verimli yürütülmesini zorlaştırır. Eğitim bir kamu hizmetidir. Türkiye'de nüfus artışı hızlıdır. Dolayısıyla, Türkiye'de eğitim hizmetinin verimli yürütülmesi zordur." birer çıkarımdır.

Çıkarımın sonuç önermesinin öncüllerden sonra söylenmesi veya yazılması şart değildir.

ÖRNEK

Yukarıdaki örnekteki ilk çıkarımı, "Ali bugün okula gelemeyecek. Çünkü Ali bugün çok hasta" biçiminde yazabiliriz.

Çıkarımlar akıl yürütme biçimlerine göre değerlendirilir. Temel akıl yürütme biçimleri olarak, *tümdengelimli (dedüktif), tümevarımlı (indüktif) ve heptengitmeli (abdüktif)* akıl yürütmeleri ele alacağız. Tümdengelimli akıl yürütme biçimini konu edinen mantık disiplini *tümdengelimli mantık*, tümevarımlı akıl yürütme biçimini konu edinen mantık disiplini *tümevarımlı mantık*, heptengitmeli akıl yürütme biçimini konu edinen mantık disiplini ise *heptengitmeli mantık*tır. Bu ünite dışında sadece tümdengelimli mantığı ele alacak, ve çıkarımları tümdengelimli mantığa göre değerlendireceğiz.

Temel akıl yürütme biçimleri *tümdengelimli (dedüktif), tümevarımlı (indüktif) ve heptengitmeli (abdüktif)* akıl yürütmelerdir.

Hangi akıl yürütme biçimine başvuracağımız koşullara bağlı olarak değişir. Bir çıkarımın düzgün kabul edilmesi hangi akıl yürütmede değerlendirildiğine bağlıdır. Bir akıl yürütme biçimine göre düzgün sayılan bir çıkarım, bir diğerine göre düzgün olmayabilir. Akıl yürütme biçimlerini ele alırken en önemli nokta, her akıl yürütme biçiminin çıkarımları hangi ölçüte göre değerlendirdiğini anlamaktır.

Tümdengelimli mantıkta bir çıkarımın öncül önermelerinin sonuç önermesini kesin olarak ortaya koymaları şartı aranır. Bu şartı sağlayan çıkarımlar geçerli çıkarımlardır.

Tümdengelimli (Dedüktif) Akıl Yürütme: Tümdengelimli akıl yürütmenin amacı, doğru öncüllerden yola çıktığımızda bizi mutlaka doğru sonuçlara ulaştıracağından emin olacağımız çıkarım biçimlerini bulmaktır. Öncüllerin sonuç önermesini zorunlu kıldığı bir çıkarım tümdengelimli mantık bakımından düzgün bir çıkarımdır. Tümdengelimli mantığa göre düzgün bir çıkarıma "geçerli" çıkarım denir. Geçerli bir tümdengelimli çıkarımda, çıkarımın öncül önermelerinin tümünün doğru olduğunu kabul ettiğimizde sonuç önermesini de doğru kabul etmemiz zorunludur. Geçerli çıkarımların bu özelliği *doğruluğu koruma* özelliği olarak adlandırılır. Bir çıkarımda tüm öncül önermeleri doğru ve sonuç önermesini yanlış kabul etmek olanaklı ise, bu çıkarım tümdengelimli mantık bakımından düzgün olmayan bir çıkarımdır. Böyle bir çıkarım "geçersiz" çıkarım olarak nitelenir.

ÖRNEK

Aşağıdaki çıkarımların her biri geçerli çıkarımlardır.
1. Çifteler Eskişehir'in bir ilçesidir. O halde, Çifteler Eskişehir'in bir ilçesidir.
2. Her insan ölümlüdür. Sokrates bir insandır. O halde, Sokrates ölümlüdür.

ÖRNEK

Aşağıdaki çıkarımların her biri geçersizdir.
1. Bazı insanlar müzisyendir. Sokrates bir insandır. O halde Sokrates müzisyendir.
2. Çifteler ya Eskişehir'in bir ilçesi ya da Ankara'nın bir ilçesidir. O halde, Çifteler Eskişehir'in bir ilçesidir.

DİKKAT

Genel olarak, bir çıkarımın geçerli olduğunu sadece öncül ve sonuç önermelerinin doğruluk değerlerine bakarak söyleyemeyiz. Çıkarımın geçerliliği öncüller ve sonuç önermesi arasındaki mantıksal ilişkide aranmalıdır.

ÖRNEK

"Kar beyazdır. O halde, çimen yeşildir." çıkarımı, bu çıkarımın öncül ve sonuç önermesinin doğru olmasına rağmen, geçersiz bir çıkarımdır. Çimenin yeşil olması, karın beyaz olmasının mantıksal sonucu değildir. Nitekim, karın beyaz olduğu ama çimenin yeşilden başka bir renkte, örneğin kırmızı, olduğunu düşünmekte hiçbir zorluk yoktur.

ÖRNEK

"Kar yeşildir. Çimen beyazdır. O halde, Kar yeşildir ve çimen beyazdır." çıkarımı ise, geçerli bir çıkarımdır. Çünkü, çıkarımın öncülleri olan "Kar yeşildir." ve "Çimen beyazdır." önermelerini doğru kabul ettiğimizde, çıkarımın sonuç önermesi olan 'Kar yeşildir ve çimen beyazdır.' önermesini doğru kabul etmemiz zorunludur.

Bir tek durumda, çıkarımı oluşturan önermelerin gerçek doğruluk değerlerinden yola çıkarak çıkarımın geçerliliği hakkında kesin sonuca varılabilir: Bir çıkarımda, tüm öncüller doğru ve sonuç yanlış ise, o çıkarımın geçersiz olduğunu hemen söyleyebiliriz.

ÖRNEK

Ya Ankara ya da İstanbul Türkiye'nin başkentidir. O halde, İstanbul Türkiye'nin başkentidir.' çıkarımının öncül önermesi doğru olduğu halde sonuç önermesi yanlıştır. Dolayısıyla, bu çıkarımın geçersiz olduğunu kolayca söyleyebiliriz. Çıkarım geçerli olsaydı, öncül önermesi doğru olduğundan, sonuç önermesi yanlış olamazdı.

Aşağıdaki tabloda, çıkarımı oluşturan önermelerin gerçek doğruluk değerleri ile çıkarımın geçerliliği arasındaki ilişki belirtilmektedir.

Tablo 1.1

Öncüller	Sonuç	Çıkarım
Tümü doğru	Yanlış	Geçersiz
Tümü doğru	Doğru	Geçerli ya da geçersiz
Bazıları doğru, bazıları yanlış	Doğru	Geçerli ya da geçersiz
Bazıları doğru, bazıları yanlış	Yanlış	Geçerli ya da geçersiz
Tümü yanlış	Doğru	Geçerli ya da geçersiz
Tümü yanlış	Yanlış	Geçerli ya da geçersiz

Geçerli çıkarımlar düşüncelerimizi desteklemek için verebileceğimiz en güçlü gerekçeleri sağlar. Bir önermenin doğru olduğunu karşımızdakine akılcı yoldan kabul ettirmek istediğimizde, öncülleri doğru önermelerden oluşan geçerli bir çıkarım sağlamak en iyi yoldur. Ancak, tümdengelimli çıkarımlarda sonuç önermesi öncüllerin ötesine geçen bir bilgi veremez. Öncüllerin mantıksal sonucu olabilmesi için, sonuç önermesi, öncüllerde örtük durumda bulunan bilgiyi ortaya koymalıdır.

Tümevarımlı (İndüktif) Akıl Yürütme: Tümevarımlı akıl yürütmelere özellikle doğa bilimlerinde ve gündelik yaşamda başvururuz. Tümevarımlı akıl yürütmede öncül önermelerden doğru olma olasılığı yüksek sonuçlar çıkarılmaya çalışılır. Bir çıkarımda öncül önermelerin doğru olması sonuç önermesinin de doğru olma *olasılığını arttırıyor* ise, tümevarımlı akıl yürütme bakımından bu çıkarım düzgün bir çıkarım kabul edilir.

Tümevarımlı akıl yürütme bakımından bir çıkarımda öncüllerin sonuç önermesini kesin olarak ortaya koyması değil, sonucun doğru olma olasılığını arttırmaları şartı aranır.

Tümevarımlı mantığa göre düzgün sayılan ancak sonucun öncüllere göre ancak yüksek olasılıkla doğru olduğu çıkarımlar, tümdengelimli mantık bakımından geçersizdir. Ancak, tümdengelimli akıl yürütmelerden bahsederken söylediğimiz gibi, geçerli tümdengelimli çıkarımlar bize öncüllerde verilenin ötesine geçen yeni bir bilgi sağlamaz. Bir başka deyişle, tümdengelimli çıkarımlarda sonuç önermesi öncül önermelerde örtük olarak zaten bulunan bir bilgiyi ifade eder. Bu nedenle, tümdengelimli çıkarımlar gerçeklik hakkındaki bilgimizi gerçek anlamda arttırmazlar. Tümevarımlı çıkarımlar ise olgusal bilgimizi genişletmemizi sağlayan çıkarımlardır. Bu nedenle gerçeklik hakkında yeni bilgi edinmek için sadece tümdengelimli akıl yürütmelerle yetinemeyiz. Tümevarımlı mantığa göre düzgün sayılan çıkarımlarda öncüller doğru olsa bile sonuç önermesi kesin olarak doğrudur diyemememize rağmen, doğa bilimlerinde ve gündelik yaşamda tümevarımlı akıl yürütmeye başvurmamız gereklidir.

Aynı türden belli sayıda özel durumdan yola çıkarak genel bir sonuca varmaya çalışmak da tümevarımlı akıl yürütmektir.

ÖRNEK

İçi görülmeyen bir torbada renklerini bilmediğimiz 20 tane bilye olsun. Bu torbadan ardı ardına 19 tane bilye alalım. Bu durumda, aşağıdaki çıkarım, tümevarımlı akıl yürütme bakımından düzgün bir çıkarımdır.

Birinci bilye kırmızıdır.
İkinci bilye kırmızıdır.
Üçüncü bilye kırmızıdır.
...
Ondokuzuncu bilye kırmızıdır.

O halde, torbadaki tüm bilyeler kırmızıdır.

Tümevarımlı akıl yürütmede, bir çıkarım öncüllerinin sonuç önermesini ne derece desteklediğine göre değerlendirilir. Tümevarımlı bir çıkarımda öncül önermelerinin sonuç önermesini destekleme derecesi o çıkarımın *tümevarımsal gücü* olarak adlandırılır. Eğer tümevarımlı bir çıkarımda öncül önermelerin doğruluğu sonuç önermesinin doğruluğunu ciddi olarak arttırıyorsa, bu çıkarım *güçlü* bir tümevarımlı çıkarımdır.

ÖRNEK

Aşağıdaki çıkarım güçlü bir tümevarımlı çıkarım örneğidir.
Orçun yeni doğmuş bir bebektir.
____
O halde, Orçun yarın maraton koşup birinci olamaz.

Tümevarımlı bir çıkarımda öncül önermelerin doğruluğu sonuç önermesinin doğruluğunu anlamlı biçimde arttırmıyorsa, bu çıkarım *zayıf* bir tümevarımlı çıkarımdır. Örneğin, hakkında akıl yürüttüğümüz varlıkların sayısı, hakkında kesin bilgi sahibi olduğumuz varlıklardan çok daha fazla ise, elde edeceğimiz tümevarımlı çıkarım zayıftır.

ÖRNEK

Belli bir anda dünyadaki kuğuların sayısı sonlu ise de, potansiyel olarak kuğu sayısı sonsuzdur. Yeni doğacak herhangi bir kuğu, kuğular hakkındaki genel bir yargımızı yanlışlayabilir. Dolayısıyla, kuğular hakkında aşağıdaki çıkarım bir zayıf tümevarım örneğidir.
Gördüğüm birinci kuğu beyazdır.
Gördüğüm ikinci kuğu beyazdır.
Gördüğüm üçüncü kuğu beyazdır.
____
Dolayısıyla, tüm kuğular beyazdır.

Hakikaten, üç kuğuyu gözlemleyerek elde ettiğim bilgi, tüm kuğular hakkında bir yargıya varmak için oldukça yetersiz olduğundan bu çıkarım zayıf bir tümevarımlı çıkarımdır (Nitekim Avustralya'da siyah kuğulara rastlanmıştır).

ÖRNEK

Aşağıdaki çıkarım zayıf bir tümevarımlı çıkarımdır.
Fehmi Eskişehirlidir.
____
O halde, Fehmi evlidir.

Hakikaten, sadece Fehmi'nin Eskişehirli olması, Fehmi'nin evli olup olmadığına ilişkin hemen hiçbir bilgi vermez.

Şimdi de, benzerini sık sık yaptığımız ancak tümevarımlı mantık bakımından zayıf çıkarımlara iki örnek verelim:

ÖRNEK

Diyelim ki televizyon izlemek istiyoruz ve hangi filmi izleyeceğimize karar vermeye çalışıyoruz. Gazeteden TV programına baktığımızda, daha önce pek çok filmini izleyip beğendiğimiz bir aktörün oynadığı ve daha önce izlemediğimiz bir film olduğunu görüyoruz. Bu durumda, bu filmi izlemeye karar vermemiz doğaldır.

ÖRNEK

İnsanların piyango biletlerini çok defa büyük ikramiye isabet eden bileti satan büfeden almaya çalışmaları bir başka tümevarımlı akıl yürütme örneğidir.

SIRA SİZDE 1

Piyango bileti alan çoğu insan, piyango biletini çok defa büyük ikramiye isabet eden bileti satan büfeden almaya çalışır. Bu davranışa yol açan çıkarım hangi nedenden dolayı zayıf bir tümevarım örneğidir?

Tümevarımlı akıl yürütmenin bir biçimi de *analoji* (benzeşim) yoluyla akıl yürütmedir. Analoji yoluyla akıl yürütmede öncül önermelerde iki şey arasındaki ilgili bakımlardan benzerlikler ortaya konarak, bu iki şey arasında farklı bir bakımdan ortak özellik olduğu sonuç önermesine ulaşılır. Analojinin neden tümevarımın bir türü sayıldığı, analojinin genel biçimini aşağıdaki gibi yazdığımızda daha iyi anlaşılır:

x ve y 1. bakımdan benzerdir.
x ve y 2. bakımdan benzerdir.
...
x ve y n-inci bakımdan benzerdir.

O halde, x ve y n+1 bakımından da benzerdir.

ÖRNEK

Mars gezegeninin güneşe uzaklığı, Mars yüzeyindeki sıcaklık ve Mars gezegeninin atmosferi dünyaya benzer. Dünya insan yaşamı için elverişlidir. Dolayısıyla Mars gezegeninde de yaşamamız mümkündür.

ÖRNEK

Bir kişi ormanda yürüyüş yaparken acıkır ve yiyecek bir şeyler arar. Bir grup mantara rastlar. Bu mantarların markette gördüğü yenebilir mantarlara şekil, büyüklük ve koku bakımından benzediğini fark eder. Dolayısıyla, bu mantarların da yenebilir olduğu sonucuna varır (Pojman 2002, s. 34).

Analojinin başarılı olabilmesi için, konuya ilişkin öncüllerde verilen bilginin sonuç önermesinde ulaşılmak istenen bilgi bakımından ilgili olması gerekir. İşte kötü bir analoji örneği:

ÖRNEK

Maymunlar ve insanlar pek çok bakımdan birbirlerine benzer. İnsanlar futbol oynar. Dolayısıyla maymunlar da futbol oynar.

Heptengitmeli akıl yürütmede sonuç önermesi öncül önermelerinin tümünün doğru olması durumunu en iyi açıklayan önerme olmalıdır.

Heptengitmeli (Abdüktif) Akıl Yürütme: Heptengitmeli akıl yürütmede öncül önermelerinin tümünün doğru olması durumunu en iyi açıklayan önermeye sonuç önermesi olarak ulaşılmaya çalışılır. Tümevarımlı akıl yürütmede olduğu gibi, düzgün bir heptengitmeli akıl yürütmede, öncül önermelerinin doğru olması sonuç önermesinin doğruluğunu zorunlu kılmaz. Çıkarımları heptengitmeli mantık bakımından değerlendirirken, sadece öncüllerin sonucun doğru olma olasılığını arttırmasını değil, sonuç önermesinin öncüllerin doğru olmasını açıklayıcı gücü olmasını göz önünde bulundururuz ve açıklayıcı gücü en yüksek olan önermeyi sonuç olarak çıkarmamız gerekir. *Tümdengelimli mantık bakımından, heptengitmeli mantığın iyi saydığı ancak sonucun kesin olarak öncüllerden çıkmadığı çıkarımlar da geçersiz çıkarımlardır.* Bununla birlikte, tümevarımlı akıl yürütmeler gibi, gündelik yaşamda heptengitmeli akıl yürütmelere de başvurmak zorunda kalırız.

ÖRNEK

Bulunduğumuz odada oturduğumuz yerden pencereye baktığımızda dışarıda yağmur yağdığı görülüyor ve pencereye arada su damlaları düşüyor olsun. Bu durumda dışarıda yağmur yağdığı sonucuna varmamız doğaldır. Oysa ki, bu sonuç yanlış olabilir. Örneğin, biri üzerinde delikler bulunan bir hortum yardımıyla bu görüntüyü sağlamış olabilir. Ancak, böyle düşünmek için bir nedenimiz yoksa, bu akla yakın bir açıklama sayılmaz. Normal şartlarda dışarıda yağmur yağdığı sonucuna varmamız en akla yakın açıklamadır.

ÖRNEK

Daniel Defoe tarafından yazılan ünlü romanın aynı adı taşıyan baş kahramanı Robinson Crusoe, bir deniz yolculuğu sırasında ıssız bir adaya düşer. Bir gün, Robinson sahilde insan ayak izleri görür. Robinson bu ayak izlerinin kendisine ait olmadığını anlar. Dolayısıyla Robinson, bulunduğu adaya kendisinden başka insanların geldiği sonucuna ulaşır. Robinson'un ulaştığı sonuç aslında öncüllerin zorunlu sonucu değildir. Kumsaldaki ayak izleri, insanların burada yürümeleri dışında da pek çok şekilde oluşmuş olabilir. Ancak, en akla yakın olan açıklama, Robinson'un yaptığı gibi, sahilde insanların yürüdüğünü kabul etmektir.

Tutarlılık

Bir grup önermenin tümünün aynı zamanda doğru olabilmesi bu önermeler grubunun *tutarlı* olması demektir. Bir grup önermenin tümünün aynı zamanda doğru olamaması ise bu önerme grubunun *tutarsız* olması demektir.

ÖRNEK

"Ali Veli'nin kardeşidir." ve "Veli Ali'nin kardeşi değildir." önermeleri birlikte tutarsızdır.

ÖRNEK

"Ali Veli'den küçüktür.", "Veli Ahmet'ten küçüktür.", "Ahmet Ali'den küçüktür." önermeleri birlikte tutarsızdır. Çünkü ilk iki önermeden Ali'nin Ahmet'ten küçük olması gerektiği anlaşılır.

ÖRNEK

Ali Veli'den küçüktür. Veli Ahmet'ten küçüktür. Ali Ahmet'ten küçüktür. Önermeleri birlikte tutarlıdır.

Geçerlilik ve tutarlılık çıkarımları yakın ilintili kavramlardır. Bir çıkarımın öncül önermelerinin tümünün doğru olduğunu kabul ettiğimizde sonuç önermesini de doğru kabul etmemiz zorunlu ise, bu çıkarımın geçerli olduğunu söylemiştik. Buna göre, geçerli bir çıkarımın öncül önermelerinin doğru olduğunu ancak sonuç önermesinin yanlış olduğunu söylemek tutarsızlıktır. Tersine, bir çıkarımın öncül önermelerinin doğru olması, sonuç önermesinin yanlış olması ile tutarsız ise, o çıkarım geçerlidir. Buna göre geçerli çıkarımları öncüllerinin doğru olması sonucun yanlış olması ile tutarsız olan çıkarımlar olarak da tanımlayabiliriz.

Mantıksal Doğruluk

Bir önermenin doğru olmasını önermenin bildirdiği yargının gerçeklerle uyuşması olarak tanımlamıştık. Şimdi önermelerin doğruluğunu daha yakından ele alalım.

Kimi doğru önermelerin doğru olmaları gerçekliğin durumuna bağlıdır. Yani, gerçekliğin başka türlü olması ve dolayısıyla bu önermelerin doğruluk değerinin değişmesi mümkündür. Bu tür önermelere *olumsal olarak doğru* önermeler, bu tür doğruluğa da olumsal doğruluk denmektedir. Kimi yanlış önermelerin de yanlış olmaları gerçekliğin durumuna bağlıdır. Yani, gerçekliğin başka türlü olması ve dolayısıyla bu önermelerin doğruluk değerinin değişmesi mümkündür. Bu tür önermelere *olumsal olarak yanlış* önermeler, bu tür yanlışlığa da olumsal yanlışlık denmektedir.

ÖRNEK

"İstanbul Türkiye'nin en kalabalık kentidir." önermesi olumsal olarak doğru bir önermedir. Gerçekler başka yönde gelişebilir ve İstanbul değil, Türkiye'nin başka bir kenti Türkiye'nin en kalabalık kenti olabilirdi.

ÖRNEK

"Ankara Türkiye'nin en kalabalık kentidir." önermesi olumsal olarak yanlış bir önermedir. Gerçekler başka yönde olabilir ve Ankara gerçekten Türkiye'nin en kalabalık kenti olabilirdi.

Kimi doğru önermeler gerçek durum başka olsa bile yanlış olamayacak önermelerdir. Bu önermelere *mantıksal olarak doğru* önermeler denmektedir. Gerçekliğin hiçbir durumunda doğru olamayacak önermeler ise *mantıksal olarak yanlış* önermelerdir. Dolayısıyla, mantıksal olarak doğru bir önermenin reddedildiği bir önerme mantıksal olarak yanlış bir önerme olur. Mantıksal olarak yanlış bir önermenin reddedildiği bir önerme ise mantıksal olarak doğru bir önerme olur.

ÖRNEK

Aşağıdaki önermeler mantıksal olarak doğru önermelerdir.
1. 2=2
2. Ayşe bir dördüncü sınıf öğrencisi ise, Ayşe bir öğrencidir.

ÖRNEK

Aşağıdaki önermeler mantıksal olarak yanlış önermelerdir.
1. 2≠2
2. Ayşe bir dördüncü sınıf öğrencisi olmasına rağmen Ayşe bir öğrenci değildir.

Geçerli çıkarım kavramı ile mantıksal olarak doğru önerme ve mantıksal olarak yanlış önerme kavramları arasında sıkı bir ilişki vardır.

1. Bir çıkarımın geçerli olması ile, bu çıkarımın öncül önermelerinin "ve" ile birleştirilmesi ve "ise" ifadesinin ardından sonuç önermesinin yazılmasıyla elde edilen önermenin mantıksal olarak doğru önerme olması aynı şeydir.
2. Bir çıkarımın geçerli olması ile, bu çıkarımın öncül önermelerinin "ve" ile birleştirilmesi ve bir diğer "ve" ifadesinin ardından sonuç önermesinin "değildir" ile yazılmasıyla elde edilen önermenin mantıksal olarak yanlış önerme olması aynı şeydir.

ÖRNEK

"Her insan ölümlüdür. Sokrates bir insandır. O halde, Sokrates ölümlüdür." çıkarımı geçerli bir çıkarımdır. Bu durumda, "Her insan ölümlü ve Sokrates bir insan ise Sokrates ölümlüdür." önermesinin mantıksal olarak doğru olduğunu söyleyebiliriz.

ÖRNEK

"Ayşe bir dördüncü sınıf öğrencisi ise, Ayşe bir öğrencidir." önermesinin mantıksal olarak doğru olduğunu söylemiştik. Bu durumda, "Ayşe bir dördüncü sınıf öğrencisidir. O halde, Ayşe bir öğrencidir." çıkarımı geçerli bir çıkarımdır.

ÖRNEK *"Her insan ölümlü ve Sokrates bir insandır ve Sokrates ölümlü değildir." önermesinin mantıksal olarak yanlış olduğunu söyleyebiliriz.*

SIRA SİZDE 2

Mantıksal olarak yanlış bir önerme içeren bir önermeler grubu tutarlı olabilir mi? Açıklayınız.

MANTIKTA SEMBOLLEŞTİRME

Gündelik Dil ve Sembolik Dil

Dil üç alanda incelenir: Sentaks (dizim), semantik (anlambilim) ve pragmatik.

Bir dilin ifadeleri üç başlık altında ele alınır. İfadelerin yapısal özellikleri ve ifadelerin yapıları bakımından ilişkilerinin incelenmesi *sentaks* (dizim) alanına, ifadelerin anlam özellikleri ve ifadelerin anlamları bakımından ilişkilerinin incelenmesi *semantik* (anlambilim) alanına, ifadelerin kullanım özellikleri ve ifadelerin kullanım özellikleri bakımından ilişkilerinin incelenmesi de *pragmatik* alanına aittir.

ÖRNEK *"İnsan" sözcüğünün beş harfli olması bu sözcüğün sentaktik bir özelliğidir.*

ÖRNEK *"İnsan" sözcüğünün "İnsanlık" sözcüğünün bir parçası olması bu iki sözcük arasında sentaktik bir ilişkidir.*

Bu örnekte görüldüğü gibi, ifadelerin sentaktik özellikleri ve ifadeler arasındaki sentaktik ilişkiler, ifadelerin anlam ve kullanımlarından bağımsız olarak ortaya konabilir. "İnsan" sözcüğünün anlamını bilmeyen biri bile bu ifadenin beş harften oluştuğunu, "İnsanlık" sözcüğünün de anlamını bilmeyen biri bile "İnsan" sözcüğünün "İnsanlık" sözcüğünün bir parçası olduğunu söyleyebilir.

ÖRNEK *"İnsan" sözcüğünün konuşan hayvan anlamına gelmesi, bu sözcüğün semantik özelliğidir.*

ÖRNEK *"Al" ile "Kırmızı" sözcüklerinin eşanlamlı olması bu iki sözcük arasında semantik bir ilişkidir.*

Pragmatiğin en temel kavramı "bağlam" kavramıdır. Bağlam bir ifadenin anlamını belirleyen koşulların tümüdür. Dilsel bağlam "Bir deyimin anlamını belirlemeye katkısı olan, bu deyimi kapsayan daha geniş deyim" olarak tanımlanır (Grünberg, Onart, vd. 2002). Fiziksel bağlam ise, ifadenin anlamının belirlenmesine katkısı olan yer, zaman, ifadeyi kullanan kişi gibi faktörlerden oluşur.

ÖRNEK *"Al" sözcüğü "Bayramda her yer al bayraklarla süslendi." tümcesinde kırmızı anlamında kullanılmıştır. Burada geçen "al" sözcüğünün anlamının belirlenmesinde dilsel bağlamı oluşturan tümce yeterli olmuştur.*

ÖRNEK *"Ben şimdi burada duruyorum" tümcesinde "ben", "burada", "şimdi" sözcüklerinin hangi anlamda kullanıldığının belirlenebilmesi için tümcenin kim tarafından, ne zaman ve nerede söylendiğinin bilinmesi gerekir. Bu faktörlerden oluşan bir bağlamda, bu tümcenin anlamı bilinebilir.*

Akıl yürütme her zaman bir dil aracılığı ile gerçekleşir. Bu nedenle akıl yürütürken hangi dili kullandığımız önemlidir. Gündelik düşünme bakımından gündelik dil yeterlidir. Biz akıl yürütmelerimizi Türkçe ifade ederiz. Ancak bilimsel akıl yürütme söz konusu olduğunda, gündelik dilin yetersiz kaldığı görülür. Gündelik dilin yetersizliği hem sözcük düzeyinde, hem de tümce düzeyinde ortaya çıkar.

Akıl yürütmelerimizi dilde ortaya koyabildiğimiz ve mantık akıl yürütmeleri zihinde değil ancak dilde ortaya çıktıkları şekliyle inceleyebildiği için, dil incelemesi mantık bakımından önemlidir.

Anlam bulanıklığı: Bir ifadenin hangi varlıklara, hangi durumlara uygulanabileceğinin kesin olarak belirlenememesidir.

ÖRNEK

"Uzun", "kısa", "hızlı", "yavaş" gibi sözcüklerin anlamı bulanıktır. 30 santimlik bir kurşunkalem uzun, 30 santimlik bir heykel kısadır. Saatte 30 kilometre hızında giden bir salyangoz çok hızlı, otoyolda bu hızla giden bir otomobil çok yavaştır. Peki, tam olarak kaç santimlik bir kurşunkalem uzundur? Otoyolda giden bir otomobil tam olarak hangi hızla giderse hızlı gitmiş olur?

Çok-anlamlılık: Bir ifadenin birbiriyle ilgisiz birden fazla anlamda kullanılmasıdır.

ÖRNEK

"Al" sözcüğü "Bayramda her yer al bayraklarla süslendi." tümcesinde kırmızı rengi ifade ederken, "Bakkaldan bir kilo şeker al." tümcesinde "satın almak" fiilinin emir kipini ifade etmek için kullanılmıştır.

Tanım: Sadece sentaktik kurallarla oluşturulan dillere sembolik diller veya biçimsel diller denir.

ÖRNEK

Sembolleri sadece x, y ve # olan, ifadeleri de aşağıdaki iki kuralla belirlenen bir dil tanımlayalım.
1. x ve y birer ifadedir.
2. Herhangi iki A, B ifadelerinden elde edilen (A # B) de bir ifadedir.
Şimdi bu dilin tüm ifadelerini biliyoruz. Buna göre,
1. (x # y) düzgün bir ifadedir.
2. (y # x) düzgün bir ifadedir.
3. ((x # y) # (y # x)) düzgün bir ifadedir.
4. xy düzgün bir ifade değildir.
5. x # y düzgün bir ifade değildir.

SIRA SİZDE 3

Bu örnekte verilen işaret dizilerinin niçin bu dilin düzgün ifadeleri olduğunu veya olmadığını açıklayınız.

Görüldüğü gibi bir sembolik dil ifadelerinin anlamına ya da kullanımına ilişkin hiçbir bilgi olmaksızın ele alınabilmektedir. Elbette, kullanacağımız tüm sembolik diller belli bir anlam iletmek ve belli bir amaca yönelik kullanılmak için üretilmiştir. Ancak, sembolik düşünmenin temeli ifadeleri anlam ve kullanım özelliklerinden ayrı olarak ele alabilmektir.

Sembolleştirme

Tanım: Gündelik dilin bir ifadesinin bir sembolik dildeki karşılığını oluşturduğumuzda, başlangıçta verilen gündelik dil ifadesini *sembolleştirdiğimizi* söyleriz. Bir sembolik dile ait bir ifadenin gündelik dildeki karşılığını oluşturduğumuzda ise, sembolik ifadeyi gündelik dile *çevirdiğimizi* söyleyeceğiz.

Gündelik dilde ifade edilmiş bir önermeyi sembolik bir dilde ifade etmek o sembolik dilde sembolleştirmektir.

ÖRNEK

Türkçe'deki "İki ve beş sayılarının toplamı üç ve dört sayılarının toplamına eşittir" önermesinin, aritmetiğin sembolik dilindeki karşılığı, yani sembolleştirmesi, "$2 + 5 = 3 + 4$" sembolik önermesidir. Tersine, "$2 + 5 = 3 + 4$" sembolik önermesinin gündelik dile çevirisi "İki ve beş sayılarının toplamı üç ve dört sayılarının toplamına eşittir." önermesidir.

Gündelik dilde ifade edilmiş bir çıkarımın tüm önermelerini sembolik bir dilde ifade etmek çıkarımı o sembolik dilde sembolleştirmektir.

Tanım: Gündelik dilde ifade edilmiş bir çıkarımdaki tüm öncülleri ve sonuç önermesini sembolleştirdiğimizde, bu çıkarımı sembolleştirmiş oluruz. Çıkarım sembolleştirilirken, sonuç önermesine ulaşıldığını belirten "O halde" ya da eşanlamlı ifade yerine " $\therefore$ " sembolü kullanılır.

ÖRNEK

"İki üçten küçüktür. Dört beşten küçüktür. O halde, iki ile dördün toplamı, üç ile beşin toplamından küçüktür." çıkarımının sembolleştirmesi aşağıdaki biçimde yapılabilir:

$2 < 3,\ 4 < 5\ \therefore\ 2 + 4 < 3 + 5$

Sembolleştirmenin Yararı

Sembolleştirme söylemek istediğimizi kesin olarak ifade etmemizi sağlar.

Gündelik dilde ortaya çıkan çok-anlamlılık ve anlam belirsizliğine yukarıda kısaca değinmiştik. Sembolleştirme ifadelerde anlam ve kullanım ile ilgili kusurlardan kaçınmamızı sağlar.

Bilimsel önermelerin gündelik dilde ifade edildiğinde genellikle daha uzun olacağını söyleyebiliriz. Birkaç yüz sayfalık bir fizik ya da matematik ders kitabını sadece gündelik dili kullanarak yazmaya kalksak, ortaya ciltler dolusu bir kitap çıkardı. Örneğin, doğal sayıların özellikleri hakkında basit bir önermeyi ele alalım: "$x + y = y + x$." Şimdi bu önermeyi gündelik dilde olabildiğince kısa ifade etmeye çalışalım: "İki sayıdan birinci sayıya ikinci sayıyı eklemekle elde edeceğimiz sonuç ile, ikinci sayıya birinci sayıyı eklemekle elde edeceğimiz sonuç eşittir". Gördüğümüz gibi, sembolleştirme ile önermeler gündelik dilde olabileceğinden çok daha kısa ifade edebiliriz. Uzun bir ifadenin yapısı ve anlamı kolaylıkla yanlış değerlendirilebilir. Bu nedenle önerme ve çıkarımları olabildiğince kısa ifade etmek mantık yanlışından kaçınmak için önemlidir.

Sembolleştirme söylemek istediğimizi daha kısa ifade etmemizi sağlar.

Bundan sonraki ünitelerde göreceğimiz gibi, sembolik önermeler mantık bakımından sadece yapılarına (sentaktik özelliklerine) göre denetlenebilmektedir (Bu sayede çoğu mantık sistemi için mantıksal denetleme işlemini gerçekleştirebilen bilgisayar programları geliştirilebilmiştir). Sembolik ifadelerin tüm anlam ve kullanım özellikleri biçimsel yapılarında ortaya konmuştur. Bu nedenle, sembolleştirme gündelik dilde düşünürken yapabileceğimiz birçok hatadan kaçınmamızı sağlar. Dolayısıyla, gündelik dilde ifade edilmiş çıkarımların geçerlilik denetlemelerini de bu çıkarımları sembolleştirerek yaparız.

Sembolleştirme önermelerin mantıksal denetlemesinin sadece biçimsel kurallara göre yapılmasını sağladığından denetlemeleri hızlı ve hatasız gerçekleştirebilmemizi sağlar.

Ayrıca, özel bir sembol türü olan değişkenleri kullanarak önermeleri ve dolayısıyla çıkarımları tek tek ele almak yerine, önermelerin ve çıkarımların *biçimlerini* ele alabiliriz.

Sembolik mantıkta önerme ve çıkarım biçimlerini ele alarak genel sonuçlara ulaşabiliriz.

ÖRNEK

Aşağıdaki iki çıkarımı ele alalım:
(1) Bir gök cismi bize hareket eder görünmekte ise o cisim hareket etmektedir. Güneş bize hareket eder görünmektedir. O halde, güneş hareket etmektedir.
(2) Bir cisim ısınmakta ise o cisim genleşmektedir. Gördüğümüz demir küre ısınmaktadır. O halde, gördüğümüz demir küre genleşmektedir.
Bu iki çıkarımın da "... ise —-" ve "..." biçimindeki iki öncülden, "—-" sonuç önermesinin çıkarılması ile elde edildiğini görebiliriz. Dolayısıyla, iki öncülünden birincisi "... ise —-" biçiminde olan, diğer öncülü birincinin '...' bileşeni olan, sonuç önermesi de birinci öncülün "—-" bileşeni olan

A ise B. A. O halde, B.

çıkarım biçiminin geçerli sayılıp sayılamayacağını ortaya koyabilirsek, hem (1) ve (2) çıkarımlarının hem de bu biçimdeki tüm çıkarımların mantıksal geçerliliğine karar vermiş oluruz. Bir kez bu biçimin geçerli bir çıkarım biçimi olduğuna karar verirsek, bu biçimdeki çıkarımları geçerlilik yönünden tek tek ele almamıza gerek kalmaz.

Özet

AMAÇ 1

Mantığın konusunu ve amacını açıklayabilmek,

Mantığın konusu *akıl yürütme* dediğimiz düşünme biçimidir. Bildiğiniz gibi, hayal kurmak ve plan yapmak gibi diğer düşünme türleri de vardır ancak bu düşünme türleri, mantığın doğrudan konusunu oluşturmazlar. Akıl yürütmek, birtakım doğrulardan veya kabullerden hareket ederek, bir sonuca varmak demektir. Doğru kabullerden hareket etmek kadar, akıl yürütmelerimizi düzgün gerçekleştirmeye de dikkat etmemiz hem günlük yaşantıda hem de bilimde oldukça önemlidir.

Mantığın birinci amacı düzgün akıl yürütme biçimlerini belirlemektir. Düzgün akıl yürütmelere başvurmaya çalışmak, bu akıl yürütme biçimlerine başvurduğumuzda ve doğru kabullerden hareket ettiğimizde, ulaştığımız sonucun kesin olarak doğru, ya da yüksek olasılıkla doğru olmasını sağladıkları için önemlidir. Buna göre, "mantıklı düşünmek" mantığın ortaya koyduğu düzgün akıl yürütme biçimlerine uygun olarak düşünmek demektir. Mantığın iki temel amacı, düzgün akıl yürütme biçimlerini belirlemek ve akıl yürütmelerin düzgün olup olmadığını denetleyecek yöntemler geliştirmektir. Bu iki temel amaç gerçekleştiği ölçüde, mantığa başvurarak gerçeklik hakkındaki bilgimizi genişletmemiz mümkün olur.

AMAÇ 2

Mantığın temel kavramlarını açıklayabilmek,

Önerme yargı bildiren tümce, yani, bildirsel tümcedir. Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasını da şu şekilde tanımlıyoruz: Önermenin bildirdiği yargı gerçeklikle uyuşuyorsa önerme doğru, aksi takdirde önerme yanlıştır. "Doğru" ve "yanlış" değerleri "doğruluk değerleri" olarak adlandırılır. Bir tümcenin önerme olması için o tümcenin doğruluk değerini bilmemiz gerekmez. Aksine, genellikle önce tümcenin bir yargı bildirdiğini anlar ve, dolayısıyla, bir önerme olduğuna karar verir, ardından da doğruluk değerine karar veririz.

Bir veya daha fazla sayıda önermeden hareketle bir başka önermeye ulaşmak bir *çıkarımda bulunmak*tır. Bir çıkarımda bulunduğumuzda ulaştığımız önerme *sonuç* önermesi, sonuç önermesine ulaşmak için başlangıç noktası olarak aldığımız önermeler *öncül* önermeleridir. Öncül önermeleri ve sonuçtan oluşan önerme dizisi bir *çıkarım*dır. Bir dizi önermenin bir çıkarım olduğunu, öncül önermeleri ile sonuç önermesi arasına konan "o halde", "öyleyse", "demek ki", "dolayısıyla" gibi ifadelerle belirtiriz.

Temel akıl yürütme biçimleri, t*ümdengelimli (dedüktif), tümevarımlı (indüktif) ve heptengitmeli (abdüktif)* akıl yürütmedir. Tümdengelimli akıl yürütme biçimini konu edinen mantık disiplini *tümdengelimli mantık*, tümevarımlı akıl yürütme biçimini konu edinen mantık disiplini *tümevarımlı mantık*, heptengitmeli akıl yürütme biçimini konu edinen mantık disiplini ise *heptengitmeli mantık*tır.

Tümdengelimli akıl yürütmenin amacı, doğru öncüllerden yola çıktığımızda bizi mutlaka doğru sonuçlara ulaştıracağından emin olacağımız çıkarım biçimlerini bulmaktır. Tümdengelimli mantığa göre düzgün bir çıkarıma "geçerli" çıkarım denir. Geçerli bir tümdengelimli çıkarımda, çıkarımın öncül önermelerinin tümünün doğru olduğunu kabul ettiğimizde sonuç önermesini de doğru kabul etmemiz zorunludur. Geçerli çıkarımların bu özelliği *doğruluğu koruma* özelliği olarak adlandırılır. Bir çıkarımda tüm öncül önermeleri doğru ve sonuç önermesini yanlış kabul etmek olanaklı ise, bu çıkarım tümdengelimli mantık bakımından düzgün olmayan bir çıkarımdır. Böyle bir çıkarım "geçersiz" çıkarım olarak nitelenir. Tümevarımlı akıl yürütmede öncül önermelerden doğru olma olasılığı yüksek sonuçlar çıkarılmaya çalışılır. Bir çıkarımda öncül önermelerin doğru olması sonuç önermesinin de doğru olma olasılığını arttırıyor ise, tümevarımlı akıl yürütme bakımından bu çıkarım düzgün bir çıkarım kabul edilir. Öncül önermelerin sonuç önermesinin doğru olma olasılığını arttırma derecesi çıkarımın *tümevarım gücü* olarak adlandırılır. Tümevarımlı akıl yürütmede amaç öncül önermelere göre doğru olma olasılığı en yüksek sonuç önermesine ulaşmak yani tümevarım gücü en yüksek çıkarımlara ulaşmaktır. Bu tip bir çıkarım *güçlü tümevarım* olarak adlandırılır. Bir çıkarımın öncül önermeleri sonucun doğru olma olasılığını anlamlı biçimde arttırmıyor ise o çıkarım *zayıf tümevarım* olarak adlandırılır. Tümevarımlı akıl yürütmenin bir biçimi de *analoji* yoluyla akıl yürütmedir. Analoji yoluyla akıl yürütmede öncül önermelerde iki şey arasındaki ilgili bakımlardan benzerlikler ortaya konarak, bu iki şey arasında farklı bir bakımdan ortak özellik olduğu sonuç önermesine ulaşılır.

Heptengitmeli (abdüktif) akıl yürütmede, öncül önermelerinin tümünün doğru olması durumunu en iyi açıklayan önerme sonuç önermesi olarak kabul edilir. Tümevarımlı akıl yürütmede olduğu gibi, düzgün bir heptengitmeli akıl yürütmede, öncül önermelerinin doğru olması sonuç önermesinin doğruluğunu zorunlu kılmaz. Çıkarımları heptengitmeli mantık bakımından değerlendirirken, sadece öncüllerin sonucun doğru olma olasılığını arttırmasını değil, sonuç önermesinin öncüllerin doğru olmasını açıklayıcı gücü olmasını göz önünde bulundururuz ve açıklayıcı gücü en yüksek olan önermeyi sonuç olarak çıkarmamız gerekir.

Bir grup önermenin tümünün aynı zamanda doğru olabilmesi bu önermeler grubunun *tutarlı* olması demektir. Bir grup önermenin tümünün aynı zamanda doğru olamaması ise bu önerme grubunun tutarsız olması demektir.

Kimi doğru önermeler gerçek durum başka olsa bile yanlış olamayacak önermelerdir. Bu önermelere *mantıksal olarak doğru* önermeler denmektedir. Gerçekliğin hiçbir durumunda doğru olamayacak önermeler ise *mantıksal olarak yanlış* önermelerdir. Doğruluk değeri gerçekliğin durumuna göre değişebilecek olan önermeler olumsal önermelerdir.

AMAÇ 3

Mantıkta sembolleştirmenin işlevini ve yararını açıklayabilmek.

Bir dilin ifadelerinin yapısal özellikleri ve ifadelerin yapıları bakımından ilişkilerinin incelenmesi *sentaks* (dizim) alanına, ifadelerin anlam özellikleri ve ifadelerin anlamları bakımından ilişkilerinin incelenmesi *semantik* alanına, ifadelerin kullanım özellikleri ve ifadelerin kullanım özellikleri bakımından ilişkilerinin incelenmesi de *pragmatik* alanına aittir. Gündelik dillerin bilimsel düşünme için yetersiz olduğu düşüncesiyle sembolik diller geliştirilmiştir. Gündelik dilin bir ifadesinin bir sembolik dildeki karşılığını oluşturduğumuzda, başlangıçta verilen gündelik dil ifadesini *sembolleştirdiğimizi* söyleriz. Gündelik dilde ifade edilmiş bir çıkarımdaki tüm öncülleri ve sonuç önermesini sembolleştirdiğimizde, bu çıkarımı sembolleştirmiş oluruz. Çıkarım sembolleştirilirken, sonuç önermesine ulaşıldığını belirten “O halde” ya da eşanlamlı ifadeler yerine ∴ sembolü kullanılır. Sembolleştirmenin, ifadelerde kısalık, açıklık ve genellik sağlama gibi faydaları vardır.

Kendimizi Sınayalım

1. Aşağıdaki sözcüklerden hangisinin anlamı bulanık **değildir?**

a. Sıcak
b. Kel
c. Yavaş
d. Öğrenci
e. Az

2. Aşağıdakilerden hangisi bir çıkarım **değildir?**

a. Eskişehir İç Anadolu'dadır. O halde, Eskişehir Ankara ile aynı bölgededir.
b. Bana yalan söyledi. Bundan böyle, ben onunla görüşmem.
c. Eskişehir İç Anadolu'dadır. Bu nedenle, Eskişehir'de Akdeniz iklimi görülür.
d. Ali bir öğrencidir. O halde, Ali'nin en az bir öğretmeni vardır.
e. Aristoteles mantığın kurucusudur. Çünkü, düzgün düşünme üzerine ilk sistemli araştırmayı o yapmıştır.

3. "Ayşe öğrencidir." ve "Bir insan öğrenci ise öğretmenleri vardır." önermelerinden oluşan gruba aşağıdaki önermelerden hangisi eklenirse tutarlılık kesinlikle bozulur?

a. Ali Ayşe'nin öğretmenidir.
b. Hiç kimse Ayşe'nin öğretmeni değildir.
c. Ayşe hiç kimsenin öğretmeni değildir.
d. Ayşe herkesin öğretmenidir.
e. Her öğretmenin bir öğrencisi olur.

4. Hangi durumda bir çıkarımın geçersiz olduğuna, sadece önermelerin gerçek doğruluk değerine bakarak karar verilir?

a. Tüm öncüller ve sonuç önermesi doğru ise
b. Tüm öncüller ve sonuç önermesi yanlış ise
c. Tüm öncüller yanlış ve sonuç önermesi doğru ise
d. Tüm öncüller doğru ve sonuç önermesi yanlış ise
e. Sonuç önermesi doğru olduğu halde en az bir öncül yanlış ise

5. Aşağıdakilerden hangisi geçerli bir çıkarımdır?

a. Ayşe Ali'nin annesidir. O halde, Ayşe Ali'yi sever.
b. Ayşe Ali'yi tanır. Ali Mehmet'i tanır. O halde, Ayşe Mehmet'i tanır.
c. Ayşe Ali'yi tanır. O halde, Ali Ayşe'yi tanır.
d. Ali hem Ayşe'yi hem de Mehmet'i tanır. O halde Ali Ayşe'yi tanır.
e. Ali ya Ayşe'yi ya da Mehmet'i tanır. O halde Ali Ayşe'yi tanır.

6. Ali'ye tüm hayatı boyunca Ayşe bakmıştır. Ali'nin kimliğinde, Ali'nin anne adının "Ayşe" olduğu belirtilmektedir. Buna göre, Ali heptengitmeli bir akıl yürütme ile hangi sonuca varmalıdır?

a. Ayşe Ali'yi evlat edinmiştir.
b. Ayşe Ali'yi kandırmaya çalışmaktadır.
c. Ali Ayşe'nin oğludur.
d. Ayşe çok iyi bir annedir.
e. Ali'nin adını Ayşe koymuştur.

7. Aşağıdakilerden hangisi, akıl yürütme yanlışlarının mantık bakımından asıl önemli nedenidir?

a. Dalgınlık
b. Güzel ve etkili söz söyleme isteği
c. Düzgün olmayan akıl yürütme biçimine başvurmak
d. Acele akıl yürütmek
e. Mantık bilmemek

8. Aşağıdakilerden hangisi düzgün bir tümce **değildir?**

a. "Mantık" beş harflidir.
b. "Mantık" en zor felsefe dersidir.
c. Mantık felsefenin aracıdır.
d. Her felsefeci mantık bilir.
e. Alfabemizin ilk harfi "A" harfidir.

9. Aşağıdakilerden hangisi bir önermedir?

a. Üçgenin iç açılarının toplamı kaç derecedir?
b. Üçgenin iç açılarının toplamını hesaplayınız.
c. Eyvah, bildiğim halde üçgenin iç açılarının toplamını yanlış yazdım!
d. Üçgenin iç açılarının toplamı 90 derecedir.
e. İki üçgenin yarısı yeşildir.

10. Aşağıdaki sözcüklerden hangisi çok-anlamlı **değildir?**

a. Al
b. Ben
c. Uçak
d. At
e. Bin

Okuma Parçası

Doğru önermeler veya kısaca doğrular, akıl doğruları ve olgu doğruları olmak üzere iki türe ayrılır. Akıl doğruları, doğruluğu salt akılla tecrübeden bağımsız (a priori) olarak belirlenebilen önermeler, olgu doğruları ise doğruluğu ancak tecrübeye bağlı (a posteriori) olarak belirlenebilen önermelerdir.

Mantığın her geçerli önermesi bir akıl doğrusudur. Nitekim geçerli bir önermenin doğruluğu tecrübeye dayanmadan salt mantık kuralları yardımıyla (a priori olarak) önermenin değillemesinin tutarsız olduğunu ortaya koymakla belirlenebilir. Tersine her akıl doğrusunun geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim akıl (salt kuramsal akıl olarak) geçerli akıl yürütmeler yapma yetisinden başka bir şey değildir. Tüm akıl yürütmeler arasında geçerli olanların belirlenmesi ise, geniş anlamda mantığın işlevidir. Oysa her akıl doğrusu öncülsüz geçerli bir akıl yürütmenin sonucudur. O halde herhangi bir akıl doğrusunun geçerliliği, dolayısıyla doğruluğu, mantık yoluyla belirlenebilmelidir. Doğruluğu salt mantık yoluyla belirlenebilen önermeler mantık doğrularıdır. Böylece her mantık doğrusu akıl doğrusu olduğu gibi her akıl doğrusunun da mantık doğrusu olduğunu söyleyebiliriz.

Gerek doğa bilimlerinin gerekse insan ve toplum bilimlerinin doğruları, hep olgu doğrusu niteliğindedir. Olgu doğrularının bilgisinin dayandığı bilimsel yöntem, Yeniçağın başından günümüze kadar bir evrim geçirmiştir. Eskimiş "deneyci" ve "tümevarımcı" anlayışa göre her bilimsel kuram, öncülleri tecrübeye dayanan tümevarımlı bir çıkarımın sonucu olarak doğrulanır. Oysa tümevarımlı çıkarımların sonucu hiç de güvenilir olmadığı gibi, tecrübeye dayanan öncüller de güvenilmezdir.

Tecrübe algılara dayanan (yani akıl yürütme yapmaksızın sağlanan) bilgi demektir. Ham tecrübe, güvenilir bilgi niteliğinde değildir, doğru olabildiği gibi yanlış da olabilir (...) Bilimsel tecrübe, yani gözlem ve deney ise işlenmiş, arındırılmış tecrübedir. Ancak gözlem ve deney kuram yüklü'dür. Yani gözlem ve deneyi tecrübe yığını içinde ayırt edebilmek için temellendirmek istenen kuramın kendisine başvurmak gerekir. Böylece deneyci ve tümevarımcı yöntemin hiçbir işe yaramadığını söyleyebiliriz.

Yeni bir bilimsel anlayış, bu güçlükleri gidermek amacıyla ortaya konulmuştur. Bu yeni anlayışa göre bilimsel yöntem, eldeki bilgi dağarcığı'nın (...) akıl ve mantığın süzgecinden geçirilmesini ön görür. Bilgi dağarcığının her an tutarlı olması istenir; nitekim tutarsız bir bilgi dağarcığı zorunlu olarak yanlış öğeler kapsar.

İşte mantığın süzgeç olarak görevi, bilgi dağarcığında tutarsızlık olup olmadığını saptayarak ortaya çıkan tutarsızlığı gidermektir (...)

Sonuç olarak tümdengelimli mantığın gerek soyut gerçekliğin a priori bilgisine, gerekse somut gerçekliğin a posteriori bilgisine erişmek için temel yöntem olduğunu söyleyebiliriz. Mantıktan yoksun tecrübe Kant'ın deyimiyle "kör"dür, ama tecrübeden yoksun mantık "boş" değildir. Nitekim mantık tecrübeye dayanmaksızın soyut gerçekliğin (özellikle matematiksel nesnelerin) bilgisini sağlar. Soyut gerçekliğe ilişkin akıl doğrularını salt mantık yoluyla bilebiliriz. Somut gerçekliğe (yani insan, doğa ve toplum'a) ilişkin olgu doğrularını ise kesin olarak bilemeyiz. Kesin olarak bilebildiğimiz sadece olgu doğrularına ait bilgi dağarcığında tutarsızlık olup olmadığıdır. Bu da tümdengelimli mantığın katkısı olup olgu doğrularına ait bilgi edinme sürecinin temelini oluşturur. Böylece tümdengelimli mantığın yalnız akıl doğruları alanında değil, olgu doğruları alanında da yöntem olarak son derece önemli bir görevi olduğu ortaya çıkar. Nitekim mantık bizi olgu doğruları konusunda mutlak bir şüpheciliğe düşmekten kurtaran etken sayılmalıdır.

Kaynak: Grünberg, T. (1986). "Mantık ve Gerçeklik" **Türkiye I. Felsefe, Mantık, Bilim Tarihi Sempozyumu Bildirileri.** Kenan Gürsoy ve Alparslan Açıkgenç. (Yayına hazırlayanlar), Ülke Yayın Haber Tic. Ltd. Şti. s. 233-236.

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantıkta Sembolleştirme” konusuna bakınız.
2. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantığın Temel Kavramları” konusuna bakınız. “Bana yalan söyledi. Bundan böyle, ben onunla görüşmem.” tümce dizisinde bir sonuç çıkarma değil, bir davranışa nasıl karşılık verileceğini bildirme söz konusudur.
3. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantığın Temel Kavramları” konusuna bakınız. Ayşe öğrenci ise, ve bir öğrencinin öğretmenleri olmalı ise, hiç kimsenin Ayşe’nin öğretmeni olmadığı doğru olamaz. Dolayısıyla, bu üç önerme birlikte doğru olamaz.
4. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantığın Temel Kavramları” konusuna bakınız. Tüm öncüller doğru ve sonuç önermesi yanlış ise çıkarım geçerli olamaz.
5. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantığın Temel Kavramları” konusuna bakınız.
6. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantığın Temel Kavramları” konusuna bakınız. Öncülün doğru olmasını en iyi açıklayan önerme Ali’nin Ayşe’nin oğlu olmasıdır.
7. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantığın Konusu ve Amacı” konusuna bakınız. Mantığın temel amaçlarından biri, düzgün akıl yürütme biçimleri geliştirmek ve akıl yürütmelerin düzgün olup olmadığını belirlemektir.
8. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantığın Temel Kavramları” konusuna bakınız. Bu tümce bir kelimenin (“Mantık” kelimesi) bir ders olduğunu söylemektedir.
9. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantığın Temel Kavramları” konusuna bakınız.
10.c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Mantıkta Sembolleştirme” konusuna bakınız.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra sizde 1

Piyango biletini nereden alırsak alalım, aldığımız bilete ikramiye çıkma olasılığı aynıdır. Bu nedenle bu çıkarım zayıf bir tümevarımlı çıkarım örneğidir.

Sıra Sizde 2

Mantıksal olarak yanlış bir önerme hiçbir durumda doğru olamaz. Dolayısıyla mantıksal olarak yanlış bir önerme içeren bir önermeler grubunun tümünün birlikte doğru olması mümkün olmadığından, tutarlılık tanımı gereği mantıksal olarak yanlış bir önerme içeren bir önermeler grubu tutarsızdır.

Sıra sizde 3

(x # y) düzgün bir ifadedir. İki ifade aralarına # sembolü konularak, sol ve sağ parantezler arasına yazılmıştır. Dilin ikinci kuralı gereği ifade düzgün sayılmalıdır.

(y # x) düzgün bir ifadedir: Açıklama ilk ifade ile aynıdır.

((x # y) # (y # x)) düzgün bir ifadedir: İlk iki açıklamada görüldüğü gibi (x # y) ve (y # x) birer ifade olduğundan, ikinci kural gereği ((x # y) # (y # x)) dizisi de düzgün bir ifadedir.

xy düzgün bir ifade değildir: Bu dizi ne x ne y ne de A # B biçiminde olduğundan düzgün bir ifade olamaz.

x # y düzgün bir ifade değildir: İkinci kural gereği, # içeren tüm ifadeler parantez içermelidir.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. (2000). **Sembolik Mantık El Kitabı.** (3 cilt). Ankara: METU Press.

Grünberg, T. ve Onart, A. vd. (2003). **Mantık Terimleri Sözlüğü.** Ankara: METU Press.

Pojman, L. (2002). **Philosophy: The Quest for Truth.** New York: Oxford University Press.

Ural, Ş. (1995). **Temel Mantık.** İstanbul: Çantay Kitabevi.

Yıldırım, C. (1976). **100 Soruda Mantık El Kitabı.** İstanbul: Gerçek Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999). **Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi.** İstanbul: Bilgi Yayınevi.

SEMBOLİK MANTIK

2

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Önerme eklemlerini açıklayabilecek,
- Sembolik önermeleri açıklayabilecek ve sembolik önermelerin doğruluk tablolarını yapabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Önerme eklemi
- Basit ve bileşik önerme
- Doğruluk fonksiyonu
- Doğruluk tablosu
- Totoloji
- Çelişme
- Tutarlılık
- Eşdeğer önermeler

İçerik Haritası

Sembolik Mantık

Önerme Eklemleri

- GİRİŞ
- ÖNERME EKLEMLERİ
- SEMBOLİK ÖNERMELER VE DOĞRULUK TABLOLARI

Önerme Eklemleri

GİRİŞ

İlk ünitede, önermelerin yargı bildiren tümceler olduğunu, çıkarımların da önermelerden oluştuğunu söylemiştik. Bu ünitede, önermelerin yapısını en temel sembolik mantık sistemi olan *önermeler mantığı* bakımından ele alacağız. (Önermeler mantığı, daha açık ifade ile, *önerme eklemleri mantığı* veya *doğruluk fonksiyonu mantığı* olarak da adlandırılır).

Bir önermenin mantıksal olarak doğru olmasının, bu önermenin gerçekliğin durumu nasıl olursa olsun doğru olması anlamına geldiğini, bir çıkarımın geçerli olmasının da, sonuç önermesinin öncüllerin mantıksal sonucu olması anlamına geldiğini biliyorsunuz. Bir başka ifadeyle, geçerli bir çıkarımda tüm öncüllerin doğru olduğu varsayıldığında sonuç önermesi yanlış olamaz. Hem mantıksal doğruluk hem de geçerlilik kavramları semantik kavramlar yani, önermelerin anlam özellikleri ile ilgili kavramlardır. İlk ünitenin sonunda yer alan “MANTIKTA SEMBOLLEŞTİRME” kısmında, sembolik önermelerin biçimsel yapısının, bu önermelerin anlam bakımından özelliklerini yansıtması gerektiğini belirtmiştik. İncelediğimiz mantığın “sembolik mantık” olarak adlandırılmasının nedeni de budur: Sembolik mantıkta, önermelerin ve çıkarımların - mantıksal doğruluk, mantıksal yanlışlık, geçerlilik gibi - mantıksal özelliklerini, önermeleri sadece sembol dizileri olarak kabul ederek denetleyebiliriz. Basit bir mantık sistemi olan önerme eklemleri mantığı, bu fikrin ne şekilde işe yaradığını kolayca görmemizi sağlayacaktır.

Bu ünitede ilk olarak gündelik dildeki önerme eklemlerini ele alarak, özel bir önerme eklemi türü olan doğrusal eklemlerden söz edeceğiz. Ardından önerme eklemlerinin anlamlarını kesin bir biçimde ortaya koymak için, her bir ekleme ait doğruluk tablolarını tanıtacağız. Bunu yaparken, bir önerme eklemine ait doğruluk tablosunun neden burada anlatıldığı gibi kabul edildiğini anlamaya çalışacağız. Daha sonra, önerme eklemleri mantığının sembolik dilini ve bu dilin düzgün ifadelerini yani, sembolik önermeleri ele alacağız. Son kısımda, önerme eklemlerinin doğruluk tablolarından faydalanarak, sembolik önermelerin doğruluk tablolarını nasıl oluşturabileceğimizi göreceğiz. Sembolik önermelerin doğruluk tablolarını yaparak, önermelerin ve önerme kümelerinin mantıksal özelliklerini, önermeler arasındaki mantıksal ilişkileri ve çıkarımların geçerliliğini açıkça denetleyebileceğiz.

ÖNERME EKLEMLERİ

Doğrusal Eklemler

En temel bildirsel tümceler (önermeler), “Dünya yuvarlaktır.” ve “Dünya Güneşin etrafında döner.” önermeleri gibi, bir varlığın belirli bir niteliğe sahip olduğunu veya belirli varlıklar arasında belirli bir ilişki olduğunu dile getiren önermelerdir. Bu önermeler gibi, başka bir önermeden türetilmemiş olan önermeler *basit önermeler*dir. Basit önermeler “değil” ve “ve” gibi ifadelerle birleştirilerek *bileşik önermeler* elde edilir. Bir başka deyişle en az bir başka önermeden elde edilmiş önermeler bileşik önermedir. Önermelere eklenerek veya önermeleri birleştirerek yeni önerme elde etmemizi sağlayan ifadeler *önerme eklemleri*dir. Bir bileşik önermeyi elde etmek için kullanılan önermeler bu bileşik önermenin *bileşen*leridir. Bir bileşik önermede en son birleştirilen önermeler bu bileşik önermenin *ana bileşen*leridir.

ÖRNEK

“Dünya yuvarlaktır.” ve “Dünya Güneşin etrafında döner” tümceleri, anlamlı ve kesin bir yargı bildirdikleri için, birer önermedir: “Dünya yuvarlaktır” önermesi Dünyanın yuvarlak olduğu yargısını, “Dünya Güneşin etrafında döner” önermesi de Dünyanın Güneşin etrafında döndüğü yargısını bildirir. Bu önermelerden elde edilen “Dünya yuvarlak değildir” ve “Dünya yuvarlaktır ve (Dünya) Güneşin etrafında döner” tümceleri de, anlamlı ve kesin bir yargı bildirdikleri için, birer önermedir: “Dünya yuvarlak değildir” önermesi Dünyanın yuvarlak olmadığı yargısını, “Dünya yuvarlaktır ve (Dünya) Güneşin etrafında döner” önermesi ise Dünyanın hem yuvarlak olduğu hem de Güneşin etrafında döndüğü yargısını bildirir. Bu düşünceyi genelleştirerek, her önermeden “değil” ifadesi ile yeni bir önerme elde edebileceğimizi, her iki önermeden de “ve” ifadesini kullanarak yeni bir önerme elde edebileceğimizi söyleyebiliriz.

Doğrusal eklemler, oluşturdukları bileşik önermenin doğruluk değeri sadece bileşenlerinin doğruluk değerine göre belirlenebilen eklemlerdir.

“Değil”, “ve” ve benzerlerini az sonra ele alacağımız ifadelerin en önemli özelliği, bu ifadelerin birer *doğruluk fonksiyonu* belirtmeleridir. Bir önerme ekleminin doğruluk fonksiyonu belirtmesi demek, bu eklemle elde edilmiş bir önermenin doğruluk değerinin, sadece bu eklemin anlamı ve birleştirilen önermelerin doğruluk değerlerine göre belirlenebilmesi demektir. Bu eklemlere *doğrusal eklem* denmektedir. Bu kitapta ele alacağımız tüm önerme eklemleri doğrusal eklemler olacağından “önerme eklemi” ifadesini sadece “doğrusal eklem” anlamında kullanacağız.

Doğrusal olmayan eklemlere örnek olarak, “için” ifadesini ele alalım. Bu ifade ile de, her iki önermeyi ekleyip yeni bir önerme elde edebiliriz. Örneğin, aynı önermeleri kullanarak elde edeceğimiz “Dünya Güneşin etrafında döndüğü için (Dünya) yuvarlaktır.” önermesini ele alalım. Hakikaten, anlaşılır ve kesin bir yargı bildiren bu tümce de bir önermedir. Dahası, hangi iki önermeyi alırsak alalım, bu iki önermeyi “için” ifadesi ile birleştirdiğimizde yeni bir önerme elde ederiz. Ancak, iki önermenin “için” ifadesi ile birleştirilmesi ile elde edilen önermenin doğruluk değerini sadece “için” ifadesinin anlamına ve birleştirdiğimiz iki önermenin doğruluk değerine bakarak karar veremeyiz. Hepimiz gibi, “için” ifadesinin anlamını bilen bir kişi, hem Dünyanın Güneş etrafında döndüğünü hem Dünyanın yuvarlak olduğunu bildiği halde, Dünyanın yuvarlak olmasının Güneş etrafında döndüğü için olup olmadığını bilmeyebilir. Bunu bilmek için Dünyanın yapısını, nasıl oluştuğunu vs. bilmek gerekir. Bu da, bir miktar astronomi, jeoloji, fizik bilgisi gerektirir. Bu örnekten yola çıkarak, genel olarak, “için” ifadesi ile birleştirilmiş iki önermeden oluşan bir önermenin doğruluk değerinin, sadece mantık bilgisi ile belirlenemeyeceğini söyleyebiliriz. Bu belirleme ancak bu önermelerin ait olduğu alanda (gündelik yaşam, bir bilim dalı vs.) gerçekleştirilebilir.

SIRA SİZDE 1

Ali'nin ödevini yapmadığını ve bugün okula gelmediğini biliyorsunuz. "Ali ödevini yapmadığı için okula gelmedi" önermesinin doğru olup olmadığını başka hiçbir bilgiye başvurmadan söyleyebilir misiniz?

Doğrusal olmayan önerme eklemlerinin önemli bir türü, önermelerin doğruluğunu niteleyen *kip*lerdir (modaliteler). Bir *A* önermesinin doğruluğu zorunluluk kipi ile nitelendiğinde "Zorunludur ki *A*" önermesi, olanaklılık kipi ile nitelendiğinde "Olanaklıdır ki *A*" önermesi elde edilir. Ne zorunluluk ne de olanaklılık eklemi doğrusal bir eklemdir: "Her şey kendisine özdeştir" gibi bazı doğru önermeler zorunlulukla doğrudur. "Dünya yuvarlaktır" önermesi ise doğru olmasına rağmen, yanlış olması olanaklı (mümkün) bir önerme olduğundan, zorunlulukla doğru değildir. Dolayısıyla, "*A*" doğru bir önerme olduğunda, "Zorunludur ki *A*" önermesi doğru da olabilir yanlış da. Tüm durumları ele aldığımızda ortaya çıkacak olan sonuçları bir tablo ile gösterebiliriz.

A	**Zorunludur ki *A***	**Olanaklıdır ki *A***
Doğru	Doğru ya da yanlış	Doğru
Yanlış	Yanlış	Doğru ya da yanlış

Bir dilde önerme eklemleri olarak kullandığımız ifadelerin önerme eklemi olarak yorumlanamayacak şekilde de kullanılabildiğine dikkat etmeliyiz. Örneğin, "Ahmet ve Mehmet insandır." önermesinde, "ve" bir önerme eklemi olarak kullanılmıştır. Nitekim bu önermeyi "Ahmet insandır ve Mehmet insandır." biçiminde yazdığımızda doğruluk değeri bakımından anlam değişmez. Oysa, "Ahmet ve Mehmet kardeştir." önermesinde "ve" bir önerme eklemi olarak yorumlanamaz. Hakikaten, bu önermeyi "Ahmet kardeştir ve Mehmet kardeştir" biçiminde yazdığımızda anlam değişir.

Mantıkta önerme eklemi olarak kullanılan ifadeler gündelik dilde önerme eklemi olarak yorumlanamayacak biçimde de kullanılabilir.

Önerme eklemleri olarak kullanılan ifadeler doğruluk fonksiyonu olmanın ötesine geçen bir anlam da bildirebilir. Örneğin, "Otomobilini hızla sürmeye devam etti ve (otomobiliyle) yaşlı kadına çarptı" önermesinde geçen "ve" ifadesi önerme eklemi olarak kullanılmıştır. Ancak, bu önermedeki "ve" ifadesi "ve sonra" anlamını da yüklenerek zamansal bir ilişki de göstermektedir. Hakikaten, önermenin iki ana bileşeninin yer değiştirmesiyle elde edilen "Otomobiliyle yaşlı kadına çarptı ve (otomobilini) hızla sürmeye devam etti" önermesi bambaşka bir anlam ifade etmektedir. Bu durumlarda biz önermeyi sadece önerme ekleminin doğrusal anlamına göre değerlendireceğiz.

Temel doğrusal önerme eklemleri aşağıdaki gibi adlandırılır:

- "değil" olarak okunan önerme eklemi *değilleme eklemi,*
- "ve" olarak okunan önerme eklemi *tümel evetleme eklemi,*
- "veya" olarak okunan önerme eklemi *tikel evetleme eklemi,*
- "ise" olarak okunan önerme eklemi *koşul eklemi,*
- "ancak ve ancak ... ise " olarak okunan önerme eklemi *karşılıklı koşul eklemi*dir.

En yaygın kullanılan önerme eklemleri değilleme eklemi, tikel-evetleme eklemi, tümel-evetleme eklemi, koşul eklemi ve karşılıklı-koşul eklemidir.

Bu eklemleri göstermek için yaygın olarak kullanılan semboller ise şunlardır:

- Değilleme eklemi sembolü: ~
- Tümel-evetleme eklemi sembolü:∧
- Tikel-evetleme eklemi sembolü: ∨
- Koşul eklemi sembolü: →
- Karşılıklı-koşul eklemi sembolü: ↔

Bileşik önermeler ana eklemlerine göre adlandırılır.

Bileşik önermenin ana eklemi değilleme eklemi ise *değilleme önerme;* tümel-evetleme eklemi ise *tümel-evetlemeli önerme;* tikel-evetleme eklemi ise *tikel-evetlemeli önerme;* koşul eklemi ise *koşullu önerme;* karşılıklı-koşul eklemi ise *karşılıklı-koşullu önerme*dir. Koşul önermesinin "ise" ifadesinden önceki bileşeni *ön-bileşen,* "ise" ifadesinden sonraki bileşeni *ard-bileşen* olarak adlandırılır. Örneğin, "Dünya yuvarlak ise her zaman Dünyanın bir kısmı karanlıktır" önermesinin ön-bileşeni "Dünya yuvarlaktır" önermesi, ard-bileşeni ise "Her zaman Dünyanın bir kısmı karanlıktır" önermesidir.

Gündelik dilin pek çok ifadesi gibi, önerme eklemleri de farklı sözcüklerle ifade edilebilir. Bir başka deyişle, önerme eklemlerinin de eş anlamlıları vardır. Bir ifadenin tümcede önerme eklemlerinden biri ile aynı anlamda kullanıldığına karar verdiğimizde, tümce o önerme eklemine göre anlaşılır. Bu durum özellikle bir sonraki ünitede ele alacağımız sembolleştirme konusu bakımından önemlidir: Bir ifadenin tümcede önerme eklemlerinden biri ile aynı anlamda kullanıldığına karar verdiğimizde, tümcenin sembolleştirmesi o önerme eklemine göre gerçekleştirilir.

DİKKAT

Önerme eklemleri gündelik dilde pek çok farklı ifadelerle belirtilir. Bu ifadeler de, önerme eklemi olarak kullanıldıklarında, aynı anlama gelen önerme eklemi gibi değerlendirilmelidir.

Şimdi, her bir önerme ekleminin bazı eş anlamlılarını ele alalım:

Değilleme eklemi: "A değildir" önermesi Türkçe'de en sık yükleme eklenen olumsuzluk son-eki ile ifade edilir. "Dünya Güneşin etrafında döner" önermesinin değilinin Türkçe'deki en doğal ifadesi "Dünya Güneşin etrafında dönmez" önermesidir.

Tümel evetleme eklemi: "*A* ve *B*" tümel-evetlemeli önermesi,

1. Hem *A* hem de *B*,
2. *A* olmasına rağmen *B*,
3. *A* ama (fakat, ancak) *B*,
4. *A* olmasının yanı sıra *B*

biçimlerinde ifade edilebildiği gibi,

5. Bileşenlerden biri tümcecik olarak ifade edilerek de ifade edilebilir.

Buna göre, aşağıdaki önermelerin hepsi de "Dünya kendi ekseni etrafında döner ve Dünya Güneşin etrafında döner" önermesi ile aynı yargıyı dile getirir ve, bu nedenle, aynı biçimde sembolleştirilecektir:

1. Dünya hem kendi ekseni etrafında, hem de Güneşin etrafında döner.
2. Dünya kendi ekseni etrafında dönmesine rağmen, Güneşin etrafında (da) döner.
3. Dünya kendi ekseni etrafında döner ama kendi ekseni etrafında da döner.
4. Dünya kendi ekseninin etrafında dönmesinin yanı sıra, Güneşin etrafında da döner.
5. Kendi ekseni etrafında dönen Dünya, Güneşin etrafında da döner.

Tikel evetleme eklemi: "*A* veya *B*" tikel evetlemeli önermesi "Ya *A* ya da *B*" biçiminde de ifade edilir. Buna göre, "Dünya kendi ekseni etrafında döner veya

Dünya Güneşin etrafında döner" önermesi ile aynı yargıyı dile getiren "Dünya ya kendi ekseni etrafında ya da Dünya Güneşin etrafında döner" önermesi de tikel evetlemeli önerme biçiminde sembolleştirilecektir.

Koşul eklemi: "*A* ise *B*" koşul önermesi aşağıdaki biçimlerde de ifade edilebilir:

1. Eğer *A* ise *B*.
2. *A* (olması) *B* için yeterli bir koşuldur.
3. *B* (olması) *A* için gerekli bir koşuldur.
4. *A* durumunda *B* olur.
5. *A* olduğunda *B* olur.

Buna göre, aşağıdaki önermeler "Dünya Güneş ile ay arasına girerse ay tutulması olur" önermesi ile aynı yargıyı dile getirir:

1. Eğer Dünya Güneş ile ay arasına girerse, ay tutulması olur
2. Dünyanın Güneş ile ay arasına girmesi ay tutulması için yeterli bir koşuldur.
3. Ay tutulması Dünyanın Güneş ile ay arasına girmesi için gerekli bir koşuldur.
4. Dünyanın Güneş ile ay arasına girmesi durumunda ay tutulması olur.
5. Dünya Güneş ile ay arasına girdiğinde ay tutulması olur.

Karşılıklı-koşul eklemi: "*A* ancak ve ancak *B*" karşılıklı-koşul önermesi aşağıdaki biçimlerde de dile getirilebilir.

1. Ancak *A* olması durumunda (koşuluyla) *B*.
2. *A B* için gerekli ve yeterli koşuldur.

Buna göre, aşağıdaki önermeler "Ay tutulması gerçekleşir ancak ve ancak Dünya Güneş ile ay arasına girerse" önermesi ile aynı yargıyı dile getirir:

1. Dünyanın Güneş ile ay arasına girmesi ay tutulmasının gerçekleşmesinin gerekli ve yeterli koşuludur.
2. Ancak Dünyanın Güneş ile ay arasına girmesi durumunda ay tutulması gerçekleşir.

Önerme Eklemlerinin Doğruluk Tabloları

Bir önerme ekleminin hangi doğruluk fonksiyonunu belirttiği o önerme ekleminin doğruluk tablosu ile gösterilir. Bu tablonun sütunları, ana-bileşenlere ve bileşik önerme için birer sütundan oluşur. Tablonun satırları ise, ana bileşenlerin birlikte alabileceği doğruluk değerlerine karşılık gelir. (Tablonun kaç satırdan oluştuğu ve bir satırın kaçıncı sıra olduğu söylenirken renkli gösterdiğimiz ilk satır sayılmaz). Buna göre 1-li bir eklemin doğruluk tablosu iki satırdan, 2-li bir eklemin doğruluk tablosu ise dört satırdan oluşur. Her satırın en sağında, o satırda bileşenlerin birlikte aldıkları doğruluk değerlerine göre, bileşik önermenin aldığı doğruluk değeri belirtilir.

Bir önerme ekleminin anlamı, onun doğruluk tablosu ile belirtilir.

A	$\sim A$
D	Y
Y	D

A	B	$(A \wedge B)$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Değilleme eklemi: Bir önerme doğru ise değili yanlış, yanlış ise değili doğrudur.

Tümel evetleme eklemi: Tümel-evetlemeli bir önerme ancak her iki bileşeni de doğru ise doğru olur. Diğer tüm hallerde tümel-evetlemeli bir önerme yanlıştır.

A	**B**	**$(A \vee B)$**
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Tikel evetleme eklemi: Tikel evetlemeli önerme ancak iki bileşeni de yanlış ise yanlış olur. Diğer tüm hallerde önerme doğrudur:

Tikel evetleme eklemi gündelik dilde çoğu zaman seçenekler birbirini dışlayacak biçimde kullanılır. Sözgelimi, “Yarın ya alışverişe gideceğim ya da bir arkadaşımı ziyaret edeceğim.” önermesinde tikel evetlemeyi ifade eden “ya... ya da”, eklemi bu anlamda kullanılmıştır. Tikel evetlemenin “ $\veebar$ “ sembolü ile göstereceğimiz bu biçiminin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

A	**B**	**$(A \veebar B)$**
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Koşul eklemi: Koşullu önerme ancak ön-bileşeni doğru, ard-bileşeni yanlış olduğunda yanlıştır. Diğer tüm hallerde önerme doğrudur:

A	**B**	**$(A \rightarrow B)$**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Koşul eklemi burada verilen anlamı ile “maddi gerektirme” olarak da adlandırılır. Koşul ekleminin anlamının belirlenmesi tartışmalara yol açmaktadır. Bunun nedeni, maddi gerektirmenin paradoksları olarak adlandırılan aşağıdaki iki durumdur:

1. Koşul ekleminin doğruluk tablosu gereği, ard-bileşen doğru ise, ön-bileşen doğru da yanlış da olsa, koşul önermesi doğrudur. Buna göre, aşağıdaki önermelerin ikisi de doğru kabul edilmelidir:
   $2 = 2$ ise Dünya yuvarlaktır.
   $2 \neq 2$ ise Dünya yuvarlaktır.
2. Koşul ekleminin doğruluk tablosu gereği, ön-bileşen yanlış ise, ard-bileşen doğru da yanlış da olsa, koşul önermesi doğrudur. Buna göre, aşağıdaki önermelerin ikisi de doğru kabul edilmelidir:
   $2 \neq 2$ ise Dünya yuvarlaktır.
   $2 \neq 2$ ise Dünya yuvarlak değildir.

Tüm bu koşullu önermelerde, ön-bileşen ile ard-bileşen anlamca bağımsız önermelerdir. Bu nedenle, önermenin doğru veya yanlış olarak değerlendirilmesi kabul edilmesi zor görülmektedir. Bu ve benzer itirazlara verilebilecek en iyi yanıt, tabloda anlamı belirlenen “→“ ekleminin, “ise” sözcüğünün gündelik dildeki anlamını tamamen yansıtma amacını gütmediğini, bu sözcüğün kısıtlanmış bir anlamını ifade ettiğini söylemektir.

Karşılıklı-koşul eklemi: Karşılıklı-koşullu önerme her iki bileşeni de aynı doğruluk değerini aldığında doğru, bileşenlerinin doğruluk değerleri farklı olduğunda yanlıştır:

A	**B**	**$(A \leftrightarrow B)$**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

A	*B*	*(A | B)*
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	D

A	*B*	*(A ↓ B)*
D	D	Y
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Önerme eklemleri olarak seçtiğimiz değilleme (~), tümel-evetleme (∧), tikel-evetleme (∨), koşul (→) ve karşılıklı-koşul (↔) eklemleri en sık başvurulan doğrusal önerme eklemleridir. Bunlardan başka, *tikel-değilleme sembolü (Sheffer-çubuğu* veya *bağdaşmazlık eklemi)* olarak adlandıracağımız "|" eklem sembolü ve "ne ... ne de" önerme eklemine karşılık gelen ve *tümel değilleme sembolü* olarak adlandırılan "↓" eklem sembolleri de kullanılmaktadır. Bu iki sembolün önemine az sonra değineceğiz.

SEMBOLİK ÖNERMELER VE DOĞRULUK TABLOLARI

Önermeler Mantığının Sembolik Dili

Bir sembolik dili tanımlarken, önce ifadelerin oluştururken kullanabileceğimiz işaretleri belirleriz. Ardından, bu işaretleri hangi kurallara göre bir araya getirdiğimizde düzgün bir ifade oluşturabileceğimizi belirten dizim kurallarını belirleriz.

Tanım: Sembolik önerme eklemleri mantığında kullanılan semboller şunlardır:

- Önerme değişkenleri: *p, q, r, ...*
- Değilleme eklemi: ~
- Tümel evetleme eklemi:∧
- Tikel evetleme eklemi: ∨
- Koşul eklemi: →
- Karşılıklı koşul eklemi: ↔
- Parantezler: ( )

Tanım: Önermeler mantığının sembolik önermeleri aşağıdaki iki kurala göre oluşturulur:

- Her önerme değişkeni bir sembolik önermedir.
- *A* bir sembolik önerme ise, ~*A* bir sembolik önermedir.
- *A* ve *B* birer sembolik önerme ise, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sembolik önermelerdir.

ÖRNEK

- *p, q, r* ve diğer tüm değişkenler sembolik önermelerdir.
- *~p, ~q, ~r* ve diğer tüm değillenmiş önerme değişkenleri sembolik önermelerdir.
- $(p \wedge q)$, $(p \vee r)$, $(r \rightarrow q)$, $(s \leftrightarrow p)$ sembolik önermelerdir.
- $\sim(p \wedge q)$, $\sim(p \vee r)$, $\sim(r \rightarrow q)$, $\sim(s \leftrightarrow p)$ sembolik önermelerdir.
- $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee \mathrm{r}))$, $\sim((p \wedge q) \rightarrow (p \vee r))$ sembolik önermelerdir.
- $\sim\sim p$, $\sim\sim (p \wedge q)$, $\sim\sim\sim (p \wedge q)$ sembolik önermelerdir.

Sembolik önermelerin biçimini belirtmek için kullanılan parantezlerin aşırı kullanımı okumayı güçleştirdiğinden, belirsizliğe yol açmayan kimi parantezler yazılmayabilir. Biz de, aşağıdaki kurallara uygun olarak bazı parantezleri yazmayacağız:

1. Sembolik önermelerin en dış parantezleri yazılmayabilir. Buna göre, örneğin

a. $(p \wedge q)$ yerine $p \wedge q$

b. $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee r))$ yerine $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$ yazılabilir.

2. Aritmetikte çarpmanın toplamadan önce gelmesi ve (a × b) + c yerine a × b + c yazılması gibi, eklemler arasında ~, ∧, ∨, →, ↔ öncelik sırası gözeterek çoğu parantez kaldırılabilir.

ÖRNEK

a. $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee r))$ yerine $p \wedge q \rightarrow p \vee r$

b. $\sim((p \wedge q) \rightarrow (p \vee r))$ yerine $\sim(p \wedge q \rightarrow p \vee r)$ yazılabilir

Sembolik Önermelerin Doğruluk Tabloları

Bir sembolik önermenin doğruluk tablosu, o sembolik önermenin içinde geçen önerme değişkenlerinin birlikte alabileceği doğruluk değerlerine göre (yani, o önerme için her bir doğruluk değerlemesine göre) alacağı doğruluk değerlerini gösteren tablodur. Bir sembolik önermenin doğruluk tablosunu oluştururken, önerme değişkenlerinin birlikte alabileceği tüm doğruluk değerlerini göz önünde bulundurduğumuzdan emin olmak için, şöyle bir yol izleyeceğiz: İlk olarak, en sol sütundan başlayarak, önermenin içinde geçen tüm önerme değişkenlerini alfabetik sırayla yazacağız. Satır sayısı da, önerme değişkenlerinin sayısı n ise, 2^n olacaktır. Ardından en sağdaki önerme değişkeninin altına bir **D** bir **Y** gelecek şekilde 2^n satırı dolduracağız. Bir sütun sola geçince, bu kez iki **D** iki **Y** şeklinde dolduracağız. Böyle devam ettiğimizde, en sol sütunun üst yarısı **D,** alt yarısı **Y** değerlerini içerecektir. Böylece, önerme değişkenlerine ait sütunları belirledikten sonra, bileşenlere ait sütunları, karmaşıklık derecesini de gözeterek, sağa doğru oluşturacağız. En sağdaki sütun, önermenin kendisine ait olacaktır. Bu söylediklerimizin nasıl uygulandığını, oluşturduğumuz doğruluk tablolarında dikkatlice inceleyiniz.

ÖRNEK

Şimdi, bir örnek olarak, $(p \rightarrow (q \vee p))$ önermesinin her bir değerlemede aldığı doğruluk değerini, önermenin doğruluk tablosunu yaparak belirleyelim.

p	q	$(q \vee p)$	$(p \rightarrow (q \vee p))$
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	D
Y	Y	Y	D

ÖRNEK

İkinci bir örnek olarak $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim p$ sembolik önermesinin doğruluk tablosunu yapalım.

p	q	$\sim p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge \sim p$
D	D	Y	D	Y
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	D	D

ÖRNEK

Son olarak, $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ *önermesinin doğruluk tablosunu yapalım:*

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
D	D	D	D	D	D	D
D	D	Y	D	Y	Y	D
D	Y	D	Y	D	D	D
D	Y	Y	Y	D	Y	Y
Y	D	D	Y	D	D	D
Y	D	Y	Y	D	D	D
Y	Y	D	Y	D	D	D
Y	Y	Y	Y	D	D	D

Tanım: Tüm doğruluk değerlemelerinde doğru olan bir önerme *totoloji,* tüm doğruluk değerlemelerinde yanlış olan bir önerme *çelişki* önermesidir. En az bir doğruluk değerlemesinde doğru, en az bir doğruluk değerlemesinde yanlış değerini alan bir önerme ise *olumsal* önermedir. En az bir doğruluk değerlemesinde doğru olan önerme tutarlı bir önermedir. Buna göre hem olumsal önermeler hem de totolojiler *tutarlı* önermelerdir.

Önermeler doğruluk değerlemelerinin tümünde aldıkları doğruluk değerlerine göre totolojiler, çelişki önermeleri ve olumsal önermeler olarak ayrılır.

ÖRNEK

Az önce yaptığımız doğruluk tablosuna göre, $(p \rightarrow (q \vee p))$ *bir totolojidir.*

ÖRNEK

İlgili örneklerde yaptığımız doğruluk tablolarında görüldüğü gibi, $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim p$ *ve* $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ *önermeleri olumsal önermelerdir.*

ÖRNEK

$((p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q))$ *önermesinin statüsünü doğruluk tablosunu yaparak belirleyelim:*

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$(\sim p \vee \sim q)$	$((p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q))$
D	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	D	Y
Y	D	D	Y	Y	D	Y
Y	Y	D	D	Y	D	Y

Doğruluk tablosundan anlaşıldığı gibi, $((p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q))$ sembolik önermesi bir çelişki önermesidir.

Tanım: Bir önermenin **D** değerini aldığı satırlarda önerme değişkenlerinin birlikte aldığı doğruluk değerleri o önermenin bir doğrulayıcı yorumlamasıdır. Bir önermenin **Y** değerini aldığı satırlarda önerme değişkenlerinin birlikte aldığı doğruluk değerleri o önermenin bir yanlışlayıcı yorumlamasıdır.

ÖRNEK

$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ *önermesinin doğruluk tablosunda görüldüğü gibi, p: D q:Y r: Y değerlemesi önermenin yanlışlayıcı yorumlaması, diğer tüm değerlemeler önermenin doğrulayıcı yorumlamasıdır.*

Bir totolojinin değili çelişme önermesi, çelişmenin değili ise totolojidir.

Bir önermenin doğrulayıcı yorumlaması, önermenin değili için bir yanlışlayıcı yorumlamadır. Bu durumda, bir totoloji tüm doğruluk değerlemelerinde doğru değerini alacağı için, totolojinin değili tüm doğruluk değerlemelerinde yanlış değerini alır. Demek ki, bir totolojinin değili, bir çelişki önermesi olur. Bir çelişki önermesi ise, tüm doğruluk değerlemelerinde yanlış olduğundan, değili tüm doğruluk değerlemelerinde doğru olur. Yani, bir çelişki önermesinin değili bir totolojidir.

SIRA SİZDE 2

Doğruluk tablosunu yaparak, $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ sembolik önermesinin doğrulayıcı ve yanlışlayıcı yorumlamalarını belirleyiniz.

ÖRNEK

Doğruluk tablolarını yaparak görebileceğiniz gibi, aşağıdaki biçimdeki sembolik önermeler totolojidir. Yani, A, B, C, D yerine, bu sembollerin her geçtiği yerde aynı sembolik önermeyi koymak şartıyla, herhangi bir sembolik önerme koyduğumuzda bir totoloji elde ederiz.

1. $A \to A$
2. $\sim\sim A \leftrightarrow A$
3. $A \vee \sim A$
4. $A \to (B \to A)$
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)$

Dolayısıyla,

1. Gereği, $(p \to p)$, $((p \to p) \to (p \to p))$, $(\sim\sim p \to \sim\sim p)$ birer totoloji,
2. Gereği $(\sim\sim p \leftrightarrow p)$, $\sim\sim(p \to p) \leftrightarrow (p \to p)$ birer totoloji,
3. Gereği, $(q \vee \sim q)$, $(\sim q \vee \sim\sim q)$ ve $(\sim\sim p \to \sim\sim p) \vee \sim (\sim\sim p \to \sim\sim p)$ birer totoloji
4. Gereği, $(q \vee \sim q) \to ((p \to p) \to (q \vee \sim q))$ bir totoloji
5. Gereği, $(p \to ((q \vee \sim r) \to s)) \to ((p \to (q \vee \sim r)) \to (p \to s))$ bir totolojidir.

ÖRNEK

Doğruluk tablolarını yaparak görebileceğiniz gibi, aşağıdaki biçimdeki sembolik önermeler totolojidir.

1. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
2. $(A \to B) \leftrightarrow (\sim B \to \sim A)$
3. $((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to D)) \to (C \vee D)$
4. $A \leftrightarrow A$
5. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
6. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
7. $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
8. $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
9. $\sim(A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$
10. $\sim(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$
11. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
12. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
13. $A \wedge (B \vee \sim B) \leftrightarrow A$
14. $A \vee (B \wedge \sim B) \leftrightarrow A$
15. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$
16. $A \to (\sim A \to B)$
17. $A \wedge B \to B$
18. $A \wedge B \to A$
19. $A \to (B \to (A \wedge B))$
20. $\sim(A \to B) \to A \wedge \sim B$
21. $(\sim A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \sim B)$

22. $\sim(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \sim B)$
23. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
24. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B))$
25. $\sim(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B))$

Olumsal bir önermenin değili yine olumsal bir önermedir: Olumsal önerme en az bir doğruluk değerlemesinde doğru, en az bir doğruluk değerlemesinde yanlıştır. Buna göre, değili de en az bir doğruluk değerlemesinde (kendisini yanlış yapan doğruluk değerlemesinde) doğru, en az bir doğruluk değerlemesinde (kendisini doğru yapan doğruluk değerlemesinde) yanlıştır. Sonuç olarak olumsal bir önermenin değili de olumsaldır.

Olumsal bir önermenin değili de olumsaldır.

Tanım: A önermesinin doğru olduğu, yani **D** değerini aldığı, tüm değerlemelerde B önermesi de doğru oluyor, yani **D** değerini alıyorsa, A önermesi B önermesini *mantıksal olarak içerir*. Bu durum $A \models B$ şeklinde gösterilir. Genel olarak, $A, B, C, \ldots$ önermelerinin tümü **D** değerini aldığında, $Ö$ önermesi de **D** değerini alıyorsa $A, B, C, \ldots$ önermeleri $Ö$ önermesini mantıksal olarak içerir. Eğer, hem $A \models B$ hem de $B \models A$ oluyorsa, A ve B mantıksal olarak *eşdeğer* önermelerdir. Bu durum $A \equiv B$ şeklinde gösterilir. Buna göre, $A \equiv B$ olması demek A ve B önermelerinin her değerlemede aynı doğruluk değerini alması demektir.

Buna göre, $A \equiv B$ olmasının $A \leftrightarrow B$ önermesinin totoloji olması aynı anlama gelir. Dolayısıyla, yukarıdaki 1-25 totolojilerinden $A \leftrightarrow B$ biçiminde olanlara bakarak A ve B önermelerinin eşdeğer olduğunu söyleyebiliriz.

ÖRNEK

Kolayca görülebileceği gibi her A önermesi kendisini mantıksal olarak içerir. Yani, her A önermesi için, $A \models A$.

ÖRNEK

Tanımdan hemen anlaşılacağı gibi, A önermesi S kümesinin elemanı ise S kümesi A önermesini mantıksal olarak içerir.

ÖRNEK

$(p \wedge q) \models p$ *ve* $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ *olduğunu doğruluk tablosu yöntemiyle denetleyelim:*

p	**q**	**(p ∧ q)**	**p**
D	**D**	**D**	**D**
D	**Y**	**Y**	**D**
Y	**D**	**Y**	**Y**
Y	**Y**	**Y**	**Y**

p	**q**	**(p ∧ q)**	**(q ∧ p)**
D	**D**	**D**	**D**
D	**Y**	**Y**	**Y**
Y	**D**	**Y**	**Y**
Y	**Y**	**Y**	**Y**

$(p \wedge q)$ önermesinin **D** değerini aldığı tek değerleme olan 1. değerlemede p önermesi de **D** değerini aldığından, $(p \wedge q) \models p$ olduğu doğrudur. $(p \wedge q)$ ve $(q \wedge p)$ önermelerinin de her değerlemede aynı doğruluk değerini aldığı görülür. Bu nedenle $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ olduğu doğrudur.

Önerme eklemleri olarak seçtiğimiz değilleme (~), tümel-evetleme (∧), tikel-evetleme (∨), koşul (→) ve karşılıklı-koşul (↔) eklemleri en sık başvurulan doğrusal önerme eklemleridir. İfadelerde kısalık bakımından tümünü kullansak bile, kuramsal olarak, bu eklemlerin tümünü kullanmak gerekli değildir. Sadece değilleme ve tümel evetleme ile, veya sadece değilleme ve tikel-evetleme ile, veya sadece değilleme ve koşul eklemlerini kullanarak diğer önerme eklemlerini ifade edebilmekteyiz.

ÖRNEK

Doğruluk tablolarını yaparak görebileceğiniz gibi, aşağıdaki eşdeğerlikler doğru olduğundan, değilleme ve koşul eklemleri diğer eklemleri ifade etmeye yeterlidir:

1. $p \wedge q \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$
2. $p \vee q \equiv (\sim p \rightarrow q)$
3. $p \leftrightarrow q \equiv \sim((p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p))$

ÖRNEK

Doğruluk tablolarını yaparak görebileceğiniz gibi, aşağıdaki eşdeğerlikler doğru olduğundan, değilleme ve tümel evetleme eklemleri diğer eklemleri ifade etmeye yeterlidir:

1. $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$
2. $p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$
3. $p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q))$

ÖRNEK

Doğruluk tablolarını yaparak görebileceğiniz gibi, aşağıdaki eşdeğerlikler doğru olduğundan, değilleme ve tikel evetleme eklemleri diğer eklemleri ifade etmeye yeterlidir:

1. $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$
2. $p \rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$
3. $p \leftrightarrow q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(p \vee q))$

Bir A sembolik önermesinde geçen bir B bileşeni yerine B ile eşdeğer bir B' önermesi yazılırsa, elde edilen A' önermesi A önermesine eşdeğer bir önermedir. Dolayısıyla, A' önermesinin semantik statüsü A ile aynıdır. Yani, A totoloji ise A' önermesi de bir totoloji, A çelişki önermesi ise A' önermesi de bir çelişki önermesi, A olumsal önerme ise A' önermesi de olumsal bir önermedir.

Bu işlem birden çok kere tekrarlanabilir. Bu şekilde A önermesinden bir bileşeni eşdeğeri ile yer-değiştirme ile eşdeğer bir A' önermesi, ardından A' önermesinden bir bileşeni eşdeğeri ile yer-değiştirme ile eşdeğer bir A'' önermesi ... elde edilir. Bu şekilde elde edilen tüm önermeler eşdeğer olur: $A' \equiv A'' \equiv A'''$...

ÖRNEK

Aşağıdaki önermelerin her biri $((p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q))$ *önermesi ile eşdeğerdir.*

$(\sim(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q))$ Açıklama: $\sim(\sim p \vee \sim q)$ ile $(p \wedge q)$ önermeleri eşdeğerdir.

$((\sim\sim p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q))$ Açıklama: $\sim\sim p$ ile p önermeleri eşdeğerdir

$((p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \wedge q))$ Açıklama $(\sim p \vee \sim q)$ ve $\sim(p \wedge q)$ önermeleri eşdeğerdir.

ÖRNEK

$$\begin{aligned} \sim(\sim(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim(p \vee q)) &\equiv \sim\sim(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim\sim(p \vee q)) \\ &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \vee q) \\ &\equiv \sim p \wedge (\sim q \wedge (p \vee q)) \\ &\equiv \sim p \wedge ((\sim q \wedge p) \vee (\sim q \wedge q)) \end{aligned}$$

SIRA SİZDE 3

Verdiğimiz eşdeğerliklere göre,

(a) $\sim p \rightarrow (p \wedge q)$ önermesini sadece ~ ve $\vee$ ile ifade ediniz.

(b) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ önermesini sadece ~ ve $\rightarrow$ eklemleriyle en sade biçimde ifade ediniz.

"Önerme Eklemlerinin Doğruluk Tabloları" kısmında tanıttığımız tikel-değilleme ($\mid$) ve tümel-değilleme ($\downarrow$) eklemlerinin her biri tek başına diğer beş önerme eklemini de ifade edebilmektedir. Aşağıdaki 1-5 eşdeğerlikleri tikel-değilleme eklemi ile, 6-10 eşdeğerlikleri de tümel-değilleme eklemi ile diğer eklemleri nasıl ifade edebileceğimizi ortaya koymaktadır.

1. $\sim p \equiv p \mid p$
2. $p \wedge q \equiv (p \mid q) \mid (p \mid q)$
3. $p \vee q \equiv (p \mid p) \mid (q \mid q)$
4. $p \rightarrow q \equiv p \mid (q \mid q)$
5. $p \leftrightarrow q \equiv (p \mid q) \mid ((p \mid p) \mid (q \mid q))$
6. $\sim p \equiv p \downarrow p$
7. $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
8. $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
9. $p \rightarrow q \equiv ((p \downarrow q) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow q)$
10. $p \leftrightarrow q \equiv ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow (p \downarrow (q \downarrow q))$

SIRA SİZDE 4

Doğruluk tablolarını oluşturarak,
(c) $\sim p \equiv p \mid p$
(d) $p \rightarrow q \equiv p \mid (q \mid q)$
eşdeğerliklerini denetleyiniz.

Birinci ünitede belirttiğimiz gibi, tümdengelimli mantık bakımından, sonuç önermesinin öncüllerin mantıksal sonucu olduğu çıkarımlar düzgün çıkarımlar olarak kabul edilir ve bu çıkarımlar *geçerli* çıkarım olarak nitelendirilir. Geçerlilik kavramını doğruluk tablosu yardımıyla kolaylıkla ifade edebiliriz.

Tanım: Bir sembolik çıkarımın doğruluk tablosunda, tüm öncüllerin **"D"** değerini aldığı satırlardan hiçbirinde sonuç önermesi **"Y"** değerini almıyorsa, bu çıkarım geçerlidir.

SIRA SİZDE 5

Tanıma göre, bir *A, B, ...* $\therefore$ *S* çıkarımının geçerli olması ile *A, B, ...* önermelerinin *S* önermesini içermesi aynı anlama gelmektedir. Nedenini açıklayınız.

ÖRNEK

Aşağıdaki çıkarımın geçerliliğini doğruluk tablosu yöntemiyle denetleyelim:

$$(p \rightarrow q), (p \rightarrow r) \therefore p \rightarrow (q \wedge r)$$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$
D	D	D	D	D	D	D
D	D	Y	D	Y	Y	Y
D	Y	D	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	D	D	D
Y	D	Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	D	D	Y	D
Y	Y	Y	D	D	Y	D

Tüm öncüllerin **D** değerini aldığı işaretli satırlarda sonuç önermesi de **D** değerini aldığından çıkarım geçerlidir.

Tanım: *S* bir önermeler kümesi olsun. En az bir değerlemede, *S* kümesi içindeki tüm önermeler **D** değerini alıyorsa *S tutarlı* yoksa *S tutarsız*dır denir.

ÖRNEK *K = {(p ∨ ~ q), (q → r), ~ r } önermeler kümesi tutarlıdır.*

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$(p \vee \sim q)$	$(q \rightarrow r)$
D	D	D	Y	Y	D	D
D	D	Y	Y	D	D	Y
D	Y	D	D	Y	D	D
D	Y	Y	D	D	D	D
Y	D	D	Y	Y	Y	D
Y	D	Y	Y	D	Y	Y
Y	Y	D	D	Y	D	D
Y	Y	Y	D	D	D	D

Görüldüğü gibi, 4. ve 8. değerlemelerde, *K* kümesindeki tüm önermeler doğru değerini aldığı için, *K* kümesi tutarlıdır.

Özet

Önerme eklemlerini açıklayabilmek,

Başka bir önermeden türetilmemiş olan önermeler *basit önermeler*dir. Önermelere eklenerek veya önermeleri birleştirerek yeni önerme elde etmemizi sağlayan ifadeler *önerme eklemleri*dir. Basit önermeleri "değil", "ve", "veya", "ise" ve "ancak ve ancak" önerme eklemleri ile birleştirerek *bileşik önermeler* elde edilir. Bir başka deyişle en az bir başka önermeden elde edilmiş önermeler bileşik önermedir. Önerme eklemleri olarak kabul edeceğimiz ifadelerin en önemli özelliği bu ifadelerin birer *doğruluk fonksiyonu* belirtmeleridir. Bir önerme ekleminin doğruluk fonksiyonu belirtmesi demek, bu eklemle elde edilmiş bir önermenin doğruluk değerinin, sadece bu eklemin anlamı ve birleştirilen önermelerin doğruluk değerlerine göre belirlenebilmesi demektir. Bu eklemlere *doğrusal eklem* denmektedir.

"Değil" *değilleme* eklemi, "ve" *tümel-evetleme* eklemi, "veya" *tikel-evetleme* eklemi, "ise" *koşul* eklemi, "ancak ve ancak" ise *karşılıklı-koşul* eklemidir. Bileşik önermenin ana eklemi değilleme eklemi ise *değilleme önerme;* tümel-evetleme eklemi ise *tümel-evetlemeli önerme;* tikel-evetleme eklemi ise *tikel-evetlemeli önerme;* koşul eklemi ise *koşullu önerme;* karşılıklı-koşul eklemi ise *karşılıklı-koşullu önerme*dir. Koşul önermesinin "ise" ifadesinden önceki kısmı *ön-bileşen,* sonraki kısmı *ard-bileşen* olarak adlandırılır. Örneğin, "Dünya yuvarlak ise her zaman Dünyanın bir kısmı karanlıktır" önermesinin ön-bileşeni "Dünya yuvarlaktır" önermesi, ard-bileşeni ise "Her zaman Dünyanın bir kısmı karanlıktır" önermesidir.

Önerme eklemi olarak kabul ettiğimiz ifadeler gündelik dilde başka işlevlerle de kullanılabilirler. Ayrıca, gündelik dilde bir ifade, önerme eklemleri ile eş anlamlı kullanıldığında, o ifadeyi de eş anlamlısı olan önerme eklemi gibi kabul ederek sembolleştireceğiz.

Bir önerme ekleminin hangi doğruluk fonksiyonunu belirttiği o önerme ekleminin doğruluk tablosu ile gösterilir. Bu tablonun sütunları, ana-bileşenlerin her biri için birer sütundan ve bileşik önerme için bir sütundan oluşur. Tablonun satırları ise, ana bileşenlerin birlikte alabileceği doğruluk değerlerine karşılık gelir Buna göre 1-li bir eklemin doğruluk tablosu iki satırdan, 2-li bir eklemin doğruluk tablosu ise dört satırdan oluşur. Her satırın en sağında bileşik önermenin aldığı doğruluk değeri belirtilir.

Sembolik önermeleri açıklayabilmek ve sembolik önermelerin doğruluk tablolarını yapabilmek,

Önermeler mantığının sembolik dilinin alfabesi,

- Basit önermeleri işaret eden olarak *p, q, r, ...* önerme değişkenlerini
- 1-li bir önerme eklemi olan "~" değilleme işaretini
- 2-li önerme eklemleri olan "$\wedge$" tümel-evetleme işaretini, "$\vee$" tikel-evetleme işaretini, "$\rightarrow$" koşul işaretini ve "$\leftrightarrow$" karşılıklı-koşul işaretini
- (,) parantezlerini içerir.

Hangi işaret dizilerinin düzgün ifadeler olarak kabul edileceği dizim kuralları ile kesin olarak belirlenmiştir:

- Her önerme değişkeni bir sembolik önermedir.
- *A* bir sembolik önerme ise, ~*A* bir sembolik önermedir.
- *A* ve *B* birer sembolik önerme ise, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sembolik önermelerdir.

Bir önermenin içerdiği önerme değişkenlerine göre, her doğruluk değerlemesinde hangi doğruluk değerini aldığını gösteren tablo o önermenin doğruluk tablosudur. Önerme eklemlerinin doğruluk tablolarına göre, tüm bileşik önermelerin doğruluk tabloları oluşturulabilir. Doğruluk tablolarını yaparken, önerme değişkenlerinin birlikte alabileceği tüm doğruluk değerlerini sıraladığımızdan emin olmak için, şöyle bir yol izleyeceğiz: İlk olarak, en sol sütundan başlayarak, önermenin içinde geçen tüm önerme değişkenlerini alfabetik sırayla yazacağız. Satır sayısı da, önerme değişkenlerinin sayısı *n* ise, 2^n olacaktır. Ardından en sağdaki önerme değişkeninin altına bir **D** bir **Y** gelecek şekilde 2^n satırı dolduracağız. Bir sütun sola geçince, bu kez iki **D** iki **Y** şeklinde dolduracağız. Böyle devam ettiğimizde, en sol sütunun üst yarısı **D,** alt yarısı **Y** değerlerini içerecektir. Böylece, önerme değişkenlerine ait sütunları belirledikten sonra, bileşenlere ait sütunları, karmaşıklık derecesini de gözeterek, sağa doğru oluşturacağız. En sağdaki sütun, önermenin kendisine ait olacaktır.

Önermeler mantığında, önermeler semantik açıdan totolojiler, çelişki önermeleri ve olumsal önermeler olarak ayrılır: Tüm doğruluk değerlemelerinde doğru olan bir önerme *totoloji,* tüm doğruluk değerlemelerinde yanlış olan bir önerme *çelişki* önermesidir. En az bir doğruluk değerlemesinde doğru, en az bir doğruluk değerlemesinde yanlış değerini alan bir önerme *olumsal* önermedir. En az bir doğruluk değerlemesinde doğru olan önerme *tutarlı* bir önermedir. Buna göre hem olumsal önermeler hem de totolojiler tutarlı önermelerdir.

Doğruluk tabloları ile, bir önermenin semantik statüsü kesin olarak belirlenebilir. Bir önerme, sütunundaki tüm değerler **D** ise totoloji, tüm değerler **Y** ise çelişki önermesi, en az bir değer **D** ise tutarlı bir önerme, en az bir değer **D** ve en az bir değer de **Y** ise olumsal önermedir.

Kendimizi Sınayalım

1. Aşağıdaki tümcelerden hangisinde “ve” sözcüğü önerme eklemi olarak **yorumlanamaz?**

a. Ali ve Ahmet öğrencidir.
b. 2 ve 4 ün ortalaması 3 tür.
c. Ankara ve İstanbul büyük şehirlerdir.
d. 2 ve 4 çift sayıdır.
e. 1 ve 2 sayıları 3 ten küçük sayılardır.

2. Aşağıdaki sembol dizilerinden hangisi önermeler mantığında bir sembolik önermedir?

a. $(\sim p \vee q$
b. $(\sim p \vee q) \rightarrow r)$
c. $(p \wedge (\sim p \vee q) \rightarrow r$
d. $(p \wedge (\sim p \vee q)) \rightarrow r)$
e. $((p \wedge (\sim p \vee q)) \rightarrow r)$

3. Aşağıdaki önerme çiftlerinden hangisi eşdeğer önermelerdir?

a. $p \vee q, (\sim p \wedge \sim q)$
b. $p \vee q, \sim(p \wedge q)$
c. $\sim p \vee q, p \vee \sim q$
d. $\sim p \vee q, q \vee \sim p$
e. $\sim(p \wedge q), (\sim p \wedge q)$

4. Aşağıdaki önermelerden hangisi, “Ali öğrenci ise Ali’nin öğretmenleri vardır” önermesi ile aynı yargıyı **bildirmez?**

a. Ali’nin öğrenci olması Ali’nin öğretmenleri olması için yeterli koşuldur.
b. Ali’nin öğrenci olması durumunda Ali’nin öğretmenleri vardır.
c. Ali’nin öğretmenleri olması Ali’nin öğrenci olması için gerekli koşuldur.
d. Ali’nin öğretmenleri olmasına rağmen Ali öğrencidir.
e. Eğer Ali öğrenci ise Ali’nin öğretmenleri vardır.

5. A önermesi olumsal bir önerme ise, $\sim A$ önermesi için hangisi söylenebilir?

a. Totolojidir.
b. Çelişki önermesidir.
c. Tutarlıdır.
d. $A \wedge B$ biçimindedir.
e. $\sim\sim A$ önermesi ile eşdeğerdir.

6-8. sorularını aşağıdaki doğruluk tablosuna göre yanıtlayınız.

A	**B**	**C**	**D**
D	**D**	**D**	**D**
D	**Y**	**D**	**Y**
Y	**D**	**D**	**Y**
Y	**Y**	**Y**	**D**

6. Yukarıdaki A, B, C önermelerinin ortak doğruluk tablosuna göre aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

a. $A \equiv B$
b. $A \models B$
c. $B \models A$
d. $A \models C$
e. $C \models A$

7. YukarıdakiA, B, C, D önermelerinin ortak doğruluk tablosuna göre aşağıdakilerden hangisi geçerli bir çıkarımdır?

a. $B, C \therefore D$
b. $A, C \therefore D$
c. $B, C \therefore A$
d. $A, D \therefore B$
e. $C, A \therefore D$

8. Yukarıdaki Tabloya göre aşağıdakilerden hangisi bir çelişki önermesidir?

a. $C \wedge \sim A$
b. $C \rightarrow D$
c. $D \rightarrow C$
d. $B \wedge \sim C$
e. $D \rightarrow \sim C$

9. $p \rightarrow \sim q$ önermesinin değili aşağıdaki önermelerden hangisi ile eşdeğerdir?

a. $p \wedge \sim q$
b. $p \wedge q$
c. $p \vee q$
d. $p \vee \sim q$
e. $\sim p \vee q$

10. Eklemlerin öncelik sırasına göre parantezler kaldırıldığında

$((p \vee \sim(q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge r))$

önermesinden elde edilen önerme aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(p \vee \sim q \wedge r)) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge r)$
b. $p \vee \sim(q \wedge r) \leftrightarrow p \vee q \wedge r$
c. $(p \vee \sim q) \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge r$
d. $p \vee \sim q \wedge r \leftrightarrow (p \vee q) \wedge r)$
e. $p \vee \sim(q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge r$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. b Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Önerme Eklemleri” konusuna bakınız.

2. e Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Önermeler ve Doğruluk Tabloları” konusuna bakınız.

3. d Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Önermeler ve Doğruluk Tabloları” konusuna bakınız.

4. d Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Önerme Eklemleri” konusuna bakınız.

5. c Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Önermeler ve Doğruluk Tabloları” konusuna bakınız.

6. d Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Önermeler ve Doğruluk Tabloları” konusuna bakınız.

7. d Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Önermeler ve Doğruluk Tabloları” konusuna bakınız.

8. d Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Önermeler ve Doğruluk Tabloları” konusuna bakınız.

9. b Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Önermeler ve Doğruluk Tabloları”konusuna bakınız.

10 e Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Önermeler ve Doğruluk Tabloları” konusuna bakınız.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

Ali’nin ödevini yapmamış olduğunu ve okula gelmediğini bilmek, “Ali ödevini yapmadığı için okula gelmedi” önermesinin doğruluk değerini belirlemeye yetmez. Ali ödevini yapmamış olmasına rağmen okula gelmeye karar vermiş, ancak başka bir nedenden dolayı okula gelememiş olabilir. Genel olarak belirttiğimiz gibi, “için” ifadesi önermeleri birleştirmek için kullanılabilmesine ve geniş anlamda bir önerme eklemi olmasına rağmen, burada kabul ettiğimiz tek önerme eklemi türü olan doğrusal eklemlerden değildir.

Sıra Sizde 2

$A = (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r))$ sembolik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	A
D	D	D	D	D	D	D	D	D
D	D	Y	Y	Y	D	Y	Y	D
D	Y	D	D	D	Y	D	D	D
D	Y	Y	D	D	Y	Y	D	D
Y	D	D	Y	D	D	D	D	D
Y	D	Y	Y	D	D	Y	Y	Y
Y	Y	D	D	D	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D	D	D	D	D

Tabloda görüldüğü gibi, $A = (p\rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r))$ önermesinin tek yanlışlayıcı yorumlaması p: Y, q: D, r: Y doğruluk değerlemesidir.

Sıra Sizde 3

(a)$\sim p \rightarrow (p \wedge q) \equiv \sim\sim p \vee (p \wedge q)$
$\equiv \sim\sim p \vee \sim (\sim p \vee \sim q)$
$\equiv p \vee \sim (\sim p \vee \sim q)$

(b) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \equiv \sim(p \rightarrow \sim q) \vee \sim(\sim p \rightarrow \sim r)$
$\equiv \sim\sim(p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim(\sim p \rightarrow \sim r)$
$\equiv (p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim(\sim p \rightarrow \sim r)$

Sıra Sizde 4

(a) Aşağıdaki doğruluk tablosu $\sim p \equiv p \mid p$ olduğunu ortaya koymaktadır:

p	$\sim p$	$p \mid p$
D	Y	Y
Y	D	D

(b) $p \rightarrow q \equiv p \mid (q \mid q)$ olduğunu aşağıdaki doğruluk tablosu ortaya koymaktadır:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \mid q)$	$p \mid (q \mid q)$
D	D	D	Y	D
D	Y	Y	D	Y
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	D	D

Sıra Sizde 5

Bir *A, B, C,* ... ∴ *S* çıkarımının geçerli olması demek, çıkarımın öncülleri *A, B, C,* ... doğru olduğunda *S* sonuç önermesinin yanlış olamaması demektir. Bu ise, *A, B, C,* ... önermelerinin *S* önermesini mantıksal olarak içermesi demektir.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. (2000). **Sembolik Mantık El Kitabı.** (3 cilt). Ankara: METU Press. Grünberg, T. ve Grünberg, D. vd. (2003). **Mantık Terimleri Sözlüğü**. Ankara: METU Press.

Yıldırım, C. (1976). **100 Soruda Mantık.** İstanbul: Gerçek Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999). **Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi.** İstanbul: Bilgi Yayınevi.

SEMBOLİK MANTIK

3

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Gündelik dil önermelerini ve çıkarımlarını önermeler mantığında sembolleştirebilecek,
- Sembolik önerme ve çıkarımları gündelik dile çevirebilecek ve gündelik dildeki önerme ve çıkarımları önermeler mantığında denetleyebileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Sembolleştirme
- Sembolleştirme anahtarı
- Gündelik dile çeviri
- Çeviri anahtarı

İçerik Haritası

Sembolik Mantık

Sembolleştirme ve Çeviri

- GİRİŞ
- SEMBOLLEŞTİRME
- GÜNDELİK DİLE ÇEVİRME

Sembolleştirme ve Çeviri

GİRİŞ

Mantığın amacını ve temel kavramlarını tanıttığımız birinci ünitede, mantığın amacının düzgün akıl yürütme biçimlerini ortaya koymak ve akıl yürütmelerin bu biçimlere uygunluğunu denetlememizi sağlayacak yöntemler geliştirmek olduğunu söylemiştik. Önerme eklemlerini, sembolik önermeleri ve doğruluk tablolarını tanıttığımız ikinci ünitede ise, sembolik bir önermenin semantik statüsünün (totoloji önermesi, çelişki önermesi veya olumsal önerme olması) ve sembolik bir çıkarımın geçerliliğinin doğruluk tablolarıyla nasıl denetlenebileceğini görmüştük.

Bu ünitede, ikinci ünitede ele aldığımız doğruluk tablosu yöntemini gündelik dil önermelerine ve gündelik dildeki çıkarımlara nasıl uygulayabileceğimizi göreceğiz. Bunun için, gündelik dil önermelerini sembolik önermeler mantığının dilinde nasıl ifade edebileceğimizi öğrenmemiz gerekir. Gündelik dil önermelerini sembolik önermeler mantığında ifade edebildiğimizde, sembolik önermeler mantığı, felsefede ve genel olarak düşünmede kullanabileceğimiz bir araç olacaktır. Nitekim, gündelik dildeki bir önermeyi doğru olarak sembolleştirdiğimizde, elde ettiğimiz sembolik önermeyi denetleyerek, başlangıçta verilen gündelik dil önermesini de denetlemiş oluruz. Bunun gibi, gündelik dildeki bir çıkarımı oluşturan önermeleri doğru olarak sembolleştirdiğimizde, elde ettiğimiz sembolik çıkarımı denetleyerek, başlangıçta verilen gündelik dil çıkarımının geçerliliğini de denetlemiş oluruz. Sembolik mantığı bu biçimde gündelik dildeki ve bilim dilindeki düşünmemizi denetlemede kullanamazsak, sembolik mantık bizim için sadece bir semboller oyunu olmaktan öteye gidemez.

Ünitenin ikinci kısımda, önerme eklemleri mantığının dilindeki sembolik önermeleri gündelik dil önermelerine nasıl çevirebileceğimizi ve dolayısıyla, önerme eklemleri mantığının dilindeki sembolik bir çıkarımı gündelik dildeki bir çıkarıma nasıl çevirebileceğimizi öğreneceğiz. Sembolik bir çıkarımın geçersiz olduğunu, bu çıkarımı gündelik dilde bir çıkarıma çevirerek, örnek gösterme yoluyla ortaya koyabiliriz. Ayrıca, gündelik dil önermelerini ifade eden sembolik önermelerden elde ettiğimiz diğer sembolik önermelerin gündelik dilde ne ifade ettiğini, ancak bu sonuç önermelerini gündelik dile çevirerek ortaya koyabiliriz. Bu nedenle, gündelik dile çeviri işlemi de, sembolleştirme gibi, sembolik mantık ile gündelik dildeki düşünmeyi birbirine bağlamamızı sağlar.

Gündelik dilin hem terim sayısı hem de tümce yapıları bakımından zenginliği dolayısıyla, ne sembolleştirme ne de gündelik dile çeviri işlemleri kesin kurallarla ortaya konamaz. Bu nedenle olabildiğince çok sayıda örnek üzerinde çalışmak, ve her durumda olabilecek en iyi sembolleştirmeye veya çeviriye ulaşmaya çalışmak gerekir. Bunun için örnekleri dikkatle inceleyiniz. Ayrıca, okuduğunuz köşe yazıları ve diğer makalelerde sembolleştirmeye uygun çıkarımları sembolleştirmeye çalışmanız da oldukça ilginç ve faydalı bir çalışma olacaktır.

SEMBOLLEŞTİRME

Bir önermenin semantik statüsünün önermeler mantığı bakımından belirlenmesi, bu önermenin, totoloji mi, çelişme önermesi mi, yoksa olumsal önerme mi olduğunun ortaya konması demektir. Bir çıkarımın denetlenmesi ise, çıkarımın geçerli mi geçersiz mi olduğunun ortaya konması demektir. Bir gündelik dil önermesinin semantik statüsünün önermeler mantığı bakımından belirlenebilmesi veya bir gündelik dil çıkarımının önermeler mantığı bakımından denetlenebilmesi için, öncelikle bu önermenin veya çıkarımın önermeler mantığında sembolleştirilmesi gerekir.

Gündelik dilde ifade edilen bir önermeyi önermeler mantığında sembolleştirmek, sembolik önermeler mantığının dilinde, verilen gündelik dil önermesine karşılık gelen sembolik önermeyi bulmak demektir.

Bir gündelik dil önermesinin, önermeler mantığının sembolik dilindeki bir sembolik önerme olarak karşılığı, bu önermenin önermeler mantığında sembolleştirilmesidir. Bir çıkarımın önermeler mantığında sembolleştirilmesi ise, çıkarımı oluşturan önermelerin önermeler mantığında sembolleştirilmesinden ve öncüllerle sonuç önermesi arasına ∴ işaretinin konulmasından ibarettir. Sembolleştirmede hata yapmaktan kaçınmak için, Kalish-Montague (1980) tarafından kullanılan, aşamalı bir yol izleyeceğiz.

Sembolleştirme daima bir sembolleştirme anahtarına göre gerçekleştirilir.

Bir gündelik dil önermesini önermeler mantığında sembolleştirebilmek için, ilk olarak, bu gündelik dil önermesinde geçen basit önermelerin hangi önerme değişkenleriyle karşılanacağının belirlenmesi gerekir. Sembolleştirme sonucunda hangi sembolik önermenin elde edileceği, sembolleştirme anahtarına bağlı olarak değişir.

Tanım: Bir gündelik dil önermesindeki her bir farklı basit önermeyi farklı bir önerme değişkeni ile eşleştiren bir listeye, bu gündelik dil önermesi için bir "sembolleştirme anahtarı" denir.

ÖRNEK

"Çifteler ya Eskişehir"in bir ilçesi ya da Ankara'nın bir ilçesidir" önermesini oluşturan basit önermeler "Çifteler Eskişehir'in bir ilçesidir" ve "Çifteler Ankara'nın bir ilçesidir" önermeleridir. Buna göre, bu önerme için bir sembolleştirme anahtarı aşağıda verilmiştir:

p: Çifteler Eskişehir'in bir ilçesidir.
q: Çifteler Ankara'nın bir ilçesidir.

Bir gündelik dil çıkarımını önermeler mantığında sembolleştirebilmek için, ilk olarak, bu gündelik dil çıkarımında geçen tüm basit önermelerin hangi önerme değişkenleriyle karşılanacağının belirlenmesi gerekir. Gündelik dil önermelerinde olduğu gibi, gündelik dildeki çıkarımlarda da sembolleştirme sonucunda hangi sembolik çıkarımın elde edileceği, sembolleştirme anahtarına bağlı olarak değişir.

Tanım: Bir gündelik dil çıkarımındaki her bir farklı basit önermeyi farklı bir önerme değişkeni ile eşleştiren bir liste, bu gündelik dil çıkarımı için bir sembolleştirme anahtarıdır.

ÖRNEK

"Ayşe Ali'yi tanır. Ali Mehmet'i tanır ise Ali Mehmet'le konuşur. O halde, Ayşe Mehmet'i tanır" çıkarımında geçen basit önermeler "Ayşe Ali'yi tanır", "Ali Mehmet'i tanır", "Ali Mehmet'le konuşur" ve "Ayşe Mehmet'i tanır" önermeleridir. Buna göre, bu çıkarım için bir sembolleştirme anahtarı aşağıda verilmiştir:

p: Ayşe Ali'yi tanır.
q: Ali Mehmet'i tanır.
r: Ali Mehmet'le konuşur.
s: Ayşe Mehmet'i tanır.

"ÖNERME EKLEMLERİ" ünitesinde belirttiğimiz gibi, önerme eklemleri gündelik dilde birçok farklı şekilde ifade edilebilmektedir. Bir önermeyi sembolleştirirken, bir önerme eklemiyle eş anlamlı bir ifadenin de, eş anlamlısı olan önerme eklemi gibi sembolleştirileceğini belirtmiştik. Bu nedenle, bir önermeyi sembolleştirirken ilk olarak bu önermede geçen önerme eklemlerinin eş anlamlılarını standart olarak kabul ettiğimiz önerme eklemleriyle değiştireceğiz. Bu sırada, gerekirse cümlenin yapısını da yeniden düzenleyeceğiz ve noktalama işaretlerine uygun olarak parantezler yerleştireceğiz. Önermenin bu şekilde elde edilen biçimi "standart biçimi" olarak adlandırılır. Standart biçimdeki bir önerme sembolleştirmeye uygun hale gelmiş olur.

Bir önermenin mantıksal biçimini ortaya çıkarmak için, önce önermenin standart biçimde ifade edilmesi gerekir.

ÖRNEK

"Ali'nin mantık dersinden geçmesinin yeterli bir koşulu, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasıdır" önermesini ele alalım. "A B için yeterli bir koşuldur" önermesinin standart biçimi "A ise B" önermesidir. Önermede, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasının, Ali'nin mantık dersinden geçmesinin yeterli bir koşulu olduğu söylendiğine göre, bu önermenin standart biçimi "((Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır ve Ali tüm alıştırmaları çözmüştür) ise Ali mantık dersinden geçer)" ifadesidir.

ÖRNEK

"Ali'nin mantık dersinden geçmesinin gerekli bir koşulu, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasıdır" önermesini ele alalım. "A B için gerekli bir koşuldur" önermesinin standart biçimi "B ise A" önermesidir. Önermede, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasının, Ali'nin mantık dersinden geçmesinin gerekli bir koşulu olduğu söylendiğine göre, bu önermenin standart biçimi "(Ali mantık dersinden geçer ise (Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır ve Ali tüm alıştırmaları çözmüştür))" ifadesidir.
Sembolleştirmek istediğimiz gündelik dil önermesini standart biçimde ifade ettikten sonraki aşama, standart biçimde geçen, gündelik dile ait önerme eklemleri yerine önerme eklemi sembollerinin konmasıdır.

Sembolleştirmenin ikinci adımı, standart biçimde geçen önerme eklemlerinin sembollerinin konmasıdır.

ÖRNEK

Yukarıdaki örnekte, ilk adımın sonunda, "Ali'nin mantık dersinden geçmesinin yeterli bir koşulu, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasıdır" önermesinden "((Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır ve Ali tüm alıştırmaları çözmüştür) ise Ali mantık dersinden geçer)" önermesini elde etmiştik. İkinci adımda, önerme eklemlerini sembolleriyle değiştirerek aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

((Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır ∧ Ali tüm alıştırmaları çözmüştür)
→ Ali mantık dersinden geçer)

ÖRNEK

Yukarıdaki örnekte, ilk adımın sonunda, "Ali'nin mantık dersinden geçmesinin gerekli bir koşulu, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasıdır" önermesinden "(Ali mantık dersinden geçer ise (Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır ve Ali tüm alıştırmaları çözmüştür))" ifadesini elde etmiştik. İkinci adımda, önerme eklemlerini sembolleriyle değiştirerek aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

(Ali mantık dersinden geçer → (Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır ∧ Ali tüm alıştırmaları çözmüştür))

Sembolleştirmenin üçüncü adımı, basit önermelerin yerine, sembolleştirme anahtarında verilen karşılıkları olan, önerme değişkenlerinin yerleştirilmesidir.

Standart biçimden elde ettiğimiz son iki ifadede, önerme eklemi sembolleri dışında, sadece basit önermelerin kaldığına dikkat ediniz. Önermenin sembolik biçimini elde edeceğimiz üçüncü ve son adımda, yapmamız gereken tek şey, basit önermelerin yerine sembolleştirme anahtarında verilen önerme değişkenlerinin konmasıdır.

ÖRNEK

"Ali'nin mantık dersinden geçmesinin yeterli bir koşulu, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasıdır" önermesini sembolleştirmemiz için bize aşağıdaki sembolleştirme anahtarı verilmiş olsun.

p: Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır.
q: Ali tüm alıştırmaları çözmüştür.
r: Ali mantık dersinden geçer.

İkinci adımda elde ettiğimiz ((Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır ∧ Ali tüm alıştırmaları çözmüştür) → Ali mantık dersinden geçer) ifadesinde, basit önermeler yerine, bize verilen sembolleştirme anahtarına uygun olarak, önerme değişkenlerini koyarsak aşağıdaki sembolik önerme elde edilir:

$$((p \wedge q) \rightarrow r)$$

Sembolleştirme sonunda elde edilen önermede, istersek, okumayı zorlaştıran kimi parantezleri, ikinci ünitede belirlediğimiz işlem sırası kurallarına uygun olarak, kaldırabiliriz.

Şimdi, eğer istersek, ikinci ünitede belirlediğimiz kurallara uygun olarak kimi parantezleri eleyebiliriz. Buna göre, $((p \wedge q) \rightarrow r)$ önermesinden $p \wedge q \rightarrow r$ sembolik önermesi elde edilir.

Eğer bize, "Ali'nin mantık dersinden geçmesinin yeterli bir koşulu, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasıdır" önermesi için farklı bir sembolleştirme anahtarı verilmiş olsaydı, elde edeceğimiz sembolik önerme de farklı olacaktı. Örneğin, bize yukarıdaki sembolleştirme anahtarı yerine, aşağıdaki sembolleştirme anahtarı verilmiş olsun:

r: Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır.
t: Ali tüm alıştırmaları çözmüştür.
s: Ali mantık dersinden geçer.

Bu sembolleştirme anahtarına göre, elde edeceğimiz sembolik önerme $((p \wedge q) \rightarrow r)$ değil, $((r \wedge t) \rightarrow s)$ sembolik önermesi olacaktı.§

ÖRNEK

"Ali'nin mantık dersinden geçmesinin gerekli bir koşulu, Ali'nin mantık dersine düzenli olarak çalışmış ve tüm alıştırmaları çözmüş olmasıdır" önermesini sembolleştirmemiz için bize aşağıdaki sembolleştirme anahtarı verilmiş olsun.

p: Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır.
q: Ali tüm alıştırmaları çözmüştür.
r: Ali mantık dersinden geçer.

İkinci adımda elde ettiğimiz (Ali mantık dersinden geçer → (Ali mantık dersine düzenli olarak çalışmıştır ∧ Ali tüm alıştırmaları çözmüştür)) ifadesinde, basit önermeler yerine, bize verilen sembolleştirme anahtarına uygun olarak, önerme değişkenlerini koyarsak aşağıdaki sembolik önerme elde edilir:

$$(r \to (p \wedge q))$$

İşlem önceliği kurallarına göre, bu sembolik önermede geçen hiçbir parantezin kullanımı gerekli olmadığından, kurallara uygun olarak, $(r \to (p \wedge q))$ sembolik önermesini $r \to p \wedge q$ biçiminde yazabiliriz.

Şimdi, sembolleştirmenin aşamalarını bir arada sıralayalım:

1. **adım:** Önerme eklemlerinin eşanlamlıları yerine standart önerme eklemleri yazılarak, ve noktalamaya uygun olarak, parantezler yerleştirilerek, önermenin standart biçimi elde edilir.
2. **adım:** Önerme eklemlerinin yerine önerme eklemi sembolleri konur.
3. **adım:** Basit önermeler yerine, sembolleştirme anahtarında verilen önerme değişkenleri konur.
4. **adım:** İstenirse, okumada kolaylık sağlamak amacıyla, kimi parantezler ikinci ünitede belirttiğimiz işlem önceliği kurallarına göre kaldırılabilir.

ÖRNEK

“Hem Ankara’da hem de Eskişehir’de yağmur yağacaksa, hem Ankara hem de Eskişehir’de, yağmur yağacağında trafik sıkıştığından, yarın Ankara’da ve Eskişehir’de trafik sıkışır.” önermesini, aşağıda verilen sembolleştirme anahtarına göre, önermeler mantığında sembolleştirelim:

p: Ankara’da yağmur yağacak.
q: Eskişehir’de yağmur yağacak.
r: Ankara’da trafik sıkışır.
s: Eskişehir’de trafik sıkışır.

1. **adım:** ((Ankara’da yağmur yağacak ve Eskişehir’de yağmur yağacak) ise ((Ankara’da yağmur yağacak ise Ankara’da trafik sıkışır) ve (Eskişehir’de yağmur yağacak ise Eskişehir’de trafik sıkışır)) ise, (Ankara’da trafik sıkışır ve Eskişehir’de trafik sıkışır)))
2. **adım:** ((Ankara’da yağmur yağacak ∧ Eskişehir’de yağmur yağacak) → (((Ankara’da yağmur yağacak → Ankara’da trafik sıkışır) ∧ (Eskişehir’de yağmur yağacak → Eskişehir’de trafik sıkışır)) → (Ankara’da trafik sıkışır ∧ Eskişehir’de trafik sıkışır)))
3. **adım:** $((p \wedge q) \to (((p \to r) \wedge (q \to s)) \to (r \wedge s)))$
4. **adım:** $p \wedge q \to ((p \to r) \wedge (q \to s) \to r \wedge s)$

SIRA SİZDE 1

“Ali’nin zengin olmasının ve kendi işini kurmasının gerekli şartı Ali’ye piyangodan büyük ikramiyenin çıkması ise, Ali ne zengin olabilir ne de kendi işini kurabilir.” önermesini aşağıdaki sembolleştirme anahtarına göre sembolleştiriniz.

***p:* Ali zengin olur.**
***q:* Ali kendi işini kurar.**
***r:* Ali’ye piyangodan büyük ikramiye çıkar.**

ÖRNEK

Aşağıdaki çıkarımı, verilecek olan sembolleştirme anahtarına göre sembolleştirelim: Eğer Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyorsa, ya harcamalarını azaltması ya da, harcamalarını azaltamıyorsa, gelirini arttırmaya çalışması gereklidir. Ahmet'e büyük ikramiye çıkarsa, ne harcamalarını azaltması ne de gelirini arttırmaya çalışması gereklidir. O halde, Ahmet'e büyük ikramiye çıkmamasına rağmen Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyorsa, Ahmet'in ya harcamalarını azaltması ya da gelirini arttırmaya çalışması gereklidir.

p: Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyor.
q: Ahmet'in harcamalarını azaltması gereklidir.
r: Ahmet harcamalarını azaltabilir.
s: Ahmet gelirini arttırmaya çalışması gereklidir.
t: Ahmet'e büyük ikramiye çıkar.

Öncülleri ve sonuç önermesini tek tek ele alalım:

Birinci öncül: Eğer Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyorsa, ya harcamalarını azaltması ya da, harcamalarını azaltamıyorsa, gelirini arttırmaya çalışması gereklidir.

1. **adım:** (Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyor ise (Ahmet'in harcamalarını azaltması gereklidir veya (Ahmet'in harcamalarını azaltabileceği doğru değildir ise Ahmet'in gelirini arttırmaya çalışması gereklidir)))
2. **adım:** (Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyor → (Ahmet'in harcamalarını azaltması gereklidir ∨ (~Ahmet harcamalarını azaltabilir → Ahmet'in gelirini arttırmaya çalışması gereklidir)))
3. **adım:** $(p \rightarrow (q \vee ({\sim}r \rightarrow s)))$

İkinci öncül: Ahmet'e büyük ikramiye çıkarsa, ne harcamalarını azaltması ne de gelirini arttırmaya çalışması gereklidir.

1. **adım:** (Ahmet'e büyük ikramiye çıkar ise (Ahmet'in harcamalarını azaltması gerekli değildir ve Ahmet'in gelirini arttırmaya çalışması gerekli değildir))
2. (Ahmet'e büyük ikramiye çıkar → (~Ahmet'in harcamalarını azaltması gereklidir ∧ ~Ahmet'in gelirini arttırmaya çalışması gereklidir))
3. $(t \rightarrow ({\sim}q \wedge {\sim}s))$

Sonuç: Ahmet'e büyük ikramiye çıkmamasına rağmen Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyorsa, Ahmet'in ya harcamalarını azaltması ya da gelirini arttırmaya çalışması gereklidir.

1. **adım:** ((Ahmet'e büyük ikramiye çıktığı doğru değildir ve Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyor) ise, (Ahmet'in harcamalarını azaltması gereklidir veya Ahmet'in gelirini arttırmaya çalışması gereklidir))
2. **adım:** ((~ Ahmet'e büyük ikramiye çıkar ∧ Ahmet gelirinin yeterli olmasını istiyor) → (Ahmet'in harcamalarını azaltması gereklidir ∨ Ahmet'in gelirini arttırmaya çalışması gereklidir))
3. **adım:** $(({\sim}\, t \wedge p) \rightarrow (q \vee s))$

Sonuç olarak, bize verilen çıkarımın, belirtilen sembolleştirme anahtarına göre, sembolik önermeler mantığında sembolleştirilmesi aşağıdaki sembolik çıkarımdır.

$$(p \rightarrow (q \vee ({\sim}r \rightarrow s))),\ (t \rightarrow ({\sim}q \wedge {\sim}s))\ \therefore\ (({\sim}t \wedge p) \rightarrow (q \vee s))$$

Gündelik dildeki bir önermenin, önermeler mantığı bakımından denetlenmesi iki adımda gerçekleşir: İlk olarak gündelik dil önermesi açıkça belirtilen bir sembolleştirme anahtarına göre doğru biçimde sembolleştirilir. İkinci adımda, elde ettiğimiz sembolik önermeyi, ikinci ünitede gördüğümüz doğruluk tablosu yöntemi ile (ya da başka bir yöntem ile) denetleyebiliriz.

ÖRNEK

"Eğer Ali'nin dersten geçmesinin gerekli koşulu Ali'nin derse düzenli çalışması ve alıştırmaları çözmesi ise, Ali derse düzenli çalışmaz ya da alıştırmaları çözmez ise dersi geçmez." gündelik dil önermesinin semantik statüsünü önermeler mantığı bakımından denetleyelim. Bunun için aşağıdaki sembolleştirme anahtarını kullanalım:

p: Ali dersi geçer.
q: Ali derse düzenli çalışır.
r: Ali alıştırmaları çözer.

1. **adım:** (Ali dersi geçer ise, (Ali derse düzenli çalışır ve Ali alıştırmaları çözer)) ise, ((Ali'nin derse düzenli çalıştığı doğru değildir veya Ali'nin alıştırmaları çözdüğü doğru değildir) ise Ali'nin dersi geçebileceği doğru değildir)
2. **adım:** (Ali dersi geçer → (Ali derse düzenli çalışır ∧ Ali alıştırmaları çözer)) → ((~Ali derse düzenli çalışır ∨ ~Ali alıştırmaları çözer) → ~Ali dersi geçer)
3. **adım:** $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow ((\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim p)$

Şimdi sembolik önermenin semantik statüsünü, önermenin doğruluk tablosunu yaparak denetleyelim. Yer kazanmak amacıyla, $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow ((\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim p)$ önermesini A ile göstereceğiz.

Tablo 3.1

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim q \vee \sim r$	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r))$	$((\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim p)$	A
D	**D**	**D**	**Y**	**Y**	**Y**	**Y**	**D**	**D**	**D**	**D**
D	**D**	**Y**	**Y**	**Y**	**D**	**D**	**Y**	**Y**	**Y**	**D**
D	**Y**	**D**	**Y**	**D**	**Y**	**D**	**Y**	**Y**	**Y**	**D**
D	**Y**	**Y**	**Y**	**D**	**D**	**D**	**Y**	**Y**	**Y**	**D**
Y	**D**	**D**	**D**	**Y**	**Y**	**Y**	**D**	**D**	**D**	**D**
Y	**D**	**Y**	**D**	**Y**	**D**	**D**	**Y**	**D**	**D**	**D**
Y	**Y**	**D**	**D**	**D**	**Y**	**D**	**Y**	**D**	**D**	**D**
Y	**Y**	**Y**	**D**	**D**	**D**	**D**	**Y**	**D**	**D**	**D**

Tablodan görüldüğü gibi, gündelik dildeki "Eğer Ali'nin dersten geçmesinin gerekli koşulu Ali'nin derse düzenli çalışması ve alıştırmaları çözmesi ise, Ali derse düzenli çalışmaz ya da alıştırmaları çözmez ise dersi geçmez." önermesini sembolleştirerek elde ettiğimiz A sembolik önermesi (yani, $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow ((\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim p)$ önermesi) sadece **D** değerini aldığından, bir totolojidir. Dolayısıyla, gündelik dildeki önerme de bir totolojidir.

Gündelik dildeki bir çıkarımın sembolleştirilmesi, çıkarımda geçen önermelerin sembolleştirilmesinden ibaret olduğundan, gündelik dildeki bir çıkarımın, önermeler mantığı bakımından denetlenmesi iki adımda gerçekleşir: İlk olarak gündelik dil çıkarımını oluşturan önermeler açıkça belirtilen bir sembolleştirme anahtarına göre doğru biçimde sembolleştirilir. İkinci adımda, elde ettiğimiz sembolik çıkarımı, ikinci ünitede gördüğümüz doğruluk tablosu yöntemi ile (ya da başka bir yöntem ile) denetleyebiliriz.

ÖRNEK

"Ahmet ve Mehmet'in arkadaş olabilmelerinin gerekli koşulu, Ahmet Mehmet'in yardımını istediğinde Mehmet'in Ahmet'e yardım etmesidir. O halde, Ahmet Mehmet'in yardımını isterse, ya Mehmet Ahmet'e yardım eder ya da Ahmet ve Mehmet arkadaş olamazlar." çıkarımını önermeler mantığı bakımından denetleyelim: Verilen çıkarımı önermeler mantığı bakımından denetleyebilmek için, ilk olarak çıkarımı önermeler mantığında sembolleştirelim. Aşağıdaki semboleştirme anahtarını kullanalım:

p: Ahmet ve Mehmet arkadaş olabilir.
q: Ahmet Mehmet'in yardımını ister.
r: Mehmet Ahmet'e yardım eder.

Öncül: Ahmet ve Mehmet'in arkadaş olabilmelerinin gerekli koşulu, Ahmet Mehmet'in yardımını istediğinde Mehmet'in Ahmet'e yardım etmesidir.

1. **adım:** (Ahmet ve Mehmet arkadaş olabilir ise (Ahmet Mehmet'in yardımını ister ise Mehmet Ahmet'e yardım eder))
2. **adım:** (Ahmet ve Mehmet arkadaş olabilir → (Ahmet Mehmet'in yardımını ister → Mehmet Ahmet'e yardım eder))
3. **adım:** $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Sonuç: Ahmet Mehmet'in yardımını isterse, ya Mehmet Ahmet'e yardım eder ya da Ahmet ve Mehmet arkadaş olamazlar.

1. **adım:** (Ahmet Mehmet'in yardımını ister ise (Mehmet Ahmet'e yardım eder veya Ahmet ve Mehmet'in arkadaş olabileceği doğru değildir))
2. **adım:** (Ahmet Mehmet'in yardımını ister → (Mehmet Ahmet'e yardım eder ∨ ~Ahmet ve Mehmet arkadaş olabilir))
3. **adım:** $(q \rightarrow (r \vee {\sim}p))$

Buna göre, çıkarımın verilen sembolleştirme anahtarına uygun olarak sembolik karşılığı şöyledir:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \therefore (q \rightarrow (r \vee {\sim}p))$$

Şimdi, çıkarımın geçerliliğini doğruluk tablosu yöntemiyle denetleyebiliriz:

Tablo 3.2

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	${\sim}p$	$r \vee {\sim}p$	$q \rightarrow (r \vee {\sim}p)$
D	D	D	D	D	Y	D	D
D	D	Y	Y	Y	Y	Y	Y
D	Y	D	D	D	Y	D	D
D	Y	Y	D	D	Y	Y	D
Y	D	D	D	D	D	D	D
Y	D	Y	Y	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D	D	D	D

Öncülün doğru olduğu her satırda sonuç önermesi de doğru olduğundan çıkarım geçerlidir. Bize verilen sembolleştirme anahtarı yerine başka bir sembolleştirme anahtarı kullanmış olsaydık bile, yine geçerli bir çıkarım elde edecektik. Bu durum her zaman geçerlidir. Gündelik dildeki bir çıkarımın karşılığı olan sembolik çıkarımın geçerli olması seçilen sembolleştirme anahtarına bağlı değildir. Tüm basit önermeleri farklı birer önerme değişkeni ile sembolleştirmek şartı ile, elde edeceğimiz tüm sembolik çıkarımlar aynı sonucu verecektir.

SIRA SİZDE 2

Aşağıdaki çıkarımı verilen sembolleştirme anahtarına göre sembolleştiriniz:
Kedi ve köpek insanın yakın dostlarıdır ama kedi ve köpek bakımı zordur. Ahmet yaşlı olmasına rağmen, köpek sahibidir ve köpeğine çok iyi bakmaktadır. O halde, ya Ahmet köpeğini çok sever ya da köpek bakımı zor değildir.

***p:* Kedi insanın yakın dostudur.**
***q:* Köpek insanın yakın dostudur.**
***r:* Kedi bakımı zordur.**
***s:* Köpek bakımı zordur.**
***t:* Ahmet yaşlıdır.**
***u:* Ahmet köpek sahibidir.**
***v:* Ahmet köpeğine iyi bakmaktadır.**
***y:* Ahmet köpeğini çok sever**

GÜNDELİK DİLE ÇEVİRME

Önermeler mantığının bir sembolik önermesinin gündelik dilde bir önerme olarak karşılığı, bu önermenin gündelik dile bir çevirisidir. Önermeleri sembolleştirirken hangi önerme değişkeninin hangi basit önerme ile karşılanacağını gösteren bir sembolleştirme anahtarına ihtiyacımız olduğunu ve sembolleştirme işleminin ancak belli bir sembolleştirme anahtarına göre yapılabileceğini belirtmiştik. Sembolik önermeleri gündelik dile çevirirken de, sembolik önermelerdeki önerme değişkenlerinin hangi gündelik dil önermesi ile karşılanacağını belirtmemiz gerekir.

Bir sembolik önermede geçen her bir önerme değişkeninin hangi gündelik dil önermesiyle karşılanacağını gösteren bir listeye "çeviri anahtarı" adı verilir. Göreceğimiz gibi, bir sembolik önermenin hangi gündelik dil önermesine çevrileceği, hangi çeviri anahtarına göre çeviri yaptığımıza göre değişir.

Bir sembolik önerme için bir çeviri anahtarı, önermede geçen her bir önerme değişkeninin hangi gündelik dil önermesiyle karşılanacağını gösteren bir listedir. Bir sembolik önermenin hangi gündelik dil önermesine çevrileceği verilen çeviri anahtarına bağlıdır.

ÖRNEK

$p \leftrightarrow ((\sim r \wedge s) \vee (t \wedge q))$ sembolik önermesi için bir çeviri anahtarı, p, q, r ve s önerme değişkenlerine hangi gündelik dil önermelerinin karşılık geldiğini bildirecektir. Buna göre, bu önerme için bir çeviri anahtarı aşağıda verilmiştir:

p: Ali mantık dersini geçebilir.
q: Ali tüm alıştırmaları çözer.
r: Ali sadece sınav öncesinde ders çalışır.
s: Ali derslerine düzenli çalışır.
t: Ali ders notlarını okur.

Gündelik dile çevirme işlemi, sembolleştirme işleminin tersidir. Dolayısıyla, gündelik dile çevirme işleminde, gündelik dil önermelerini sembolleştirirken yaptığımız işlemlerin tersini yapacağız. Adım adım belirtirsek:

1. **adım:** Verilen sembolik önermede, kısaltma amacıyla eksik bırakılmış parantezler yerine konur.
2. **adım:** Sembolik önermede geçen önerme değişkenleri yerine, çeviri anahtarında belirtilen gündelik dil önermeleri konur.
3. **adım:** Önerme eklemi sembolleri yerine önerme eklemleri konur.
4. **adım:** Elde edilen ifadeyi doğal bir gündelik dil önermesine dönüştürmek için, parantezler kaldırılarak istenen önerme eklemlerinin yerine eşanlamlıları ve uygun noktalama işaretleri yerleştirilir.

Bir sembolik önermeyi gündelik dile çevirirken, sembolleştirme adımlarını tersine uygularız.

ÖRNEK

Yukarıdaki örnekte geçen $(p \leftrightarrow ((\sim r \wedge s) \vee (t \wedge q)))$ *sembolik önermesini, örnekte verilen çeviri anahtarına göre gündelik dile çevirelim:*

1. adım: *Eksik parantez olmadığı için, bu adımın sonunda* $(p \leftrightarrow ((\sim r \wedge s) \vee (t \wedge q)))$ *önermesi aynen kalır.*

2. adım: *(Ali mantık dersini geçebilir ↔ ((~Ali sadece sınav öncesinde ders çalışır ∧ Ali derslerine düzenli çalışır) ∨ (Ali ders notlarını okur ∧ Ali tüm alıştırmaları çözer)))*

3. adım: *(Ali mantık dersini geçebilir ancak ve ancak ((Ali'nin sadece sınav öncesinde ders çalıştığı doğru değildir ve Ali derslerine düzenli çalışır) veya (Ali ders notlarını okur ve Ali tüm alıştırmaları çözer)))*

4. adım: *Ali mantık dersini ancak ve ancak, sadece sınav öncesinde ders çalışmayıp derslerine düzenli olarak çalışır veya ders notlarını düzenli olarak okur ve tüm alıştırmaları çözerse geçebilir.*

Bir sembolik çıkarımın geçersiz olduğunu göstermenin yollarından biri, bu sembolik önermeyi geçersiz bir gündelik dil çıkarımına çevirmektir. Bunun için, çıkarımda geçen önerme değişkenlerinin, çeviri sonunda öncülleri doğru, sonucu yanlış bir gündelik dil çıkarımı elde edilecek şekilde seçilmesi gereklidir.

Gündelik dile çevirme, bir sembolik çıkarımın geçersiz olduğunu göstermek için bir yöntem olarak da kullanılabilir. İkinci ünitede, "MANTIĞIN TEMEL KAVRAMLARI" kısmında, çıkarım kavramını incelerken, bir tek durumda bir çıkarımın geçersiz olduğuna çıkarımı oluşturan önermelerin gerçek doğruluk değerlerine göre karar verebileceğimizi söylemiştik: Eğer, tüm öncülleri doğru ve sonuç önermesi yanlış ise, o çıkarım geçersizdir. Buna göre, bir $A, B, C, \therefore S$ sembolik çıkarımının geçersiz olduğunu göstermek istediğimizi kabul edelim. Bunun için, uygun bir çeviri anahtarı seçerek, sembolik çıkarımı tüm öncülleri doğru ancak sonuç önermesi yanlış olacak şekilde gündelik dile çevirmemiz yeterlidir.

ÖRNEK

$p \wedge q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r$ *sembolik çıkarımının geçersiz olduğunu bu çıkarımı geçersiz bir gündelik dil çıkarımına çevirerek gösterelim. Bunun için aşağıdaki çeviri anahtarını kullanabiliriz:*

p: Saat 20:00 dır.
q: Mevsim kıştır.
r: Hava kararmıştır.

Bu çeviri anahtarına göre, çıkarımın gündelik dile çevirisini bulalım:

Öncül: $p \wedge q \rightarrow r$
1. adım: $((p \wedge q) \rightarrow r)$
2. adım: ((Saat 20:00 dır ∧ Mevsim kıştır) → Hava kararmıştır)
3. adım: ((Saat 20:00 dır ve Mevsim kıştır) ise, Hava kararmıştır)
4. adım: Saat 20:00 ve mevsim kış olduğunda hava kararmıştır.
Sonuç: $p \rightarrow r$
1. adım: $(p \rightarrow r)$
2. adım: (Saat 20:00 dır → Hava kararmıştır)
3. adım: (Saat 20:00 dır ise Hava kararmıştır)
4. adım: Saat 20:00 olduğunda hava kararır.

Sonuç olarak, $p \wedge q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r$ sembolik çıkarımının, verilen çeviri anahtarına göre, gündelik dildeki karşılığı, "Saat 20:00 ve mevsim kış olduğunda hava kararmıştır. O halde, Saat 20:00 olduğunda hava kararır." çıkarımıdır. Gündelik dildeki bu çıkarımın öncülü doğrudur. Hakikaten, kış mevsiminde isek, saat 20:00 da hava kararmış olur. Ancak, sonuç önermesi yanlıştır. Çoğu yaz gününde, saat 20:00 olduğunda bile hava kararmaz. Dolayısıyla bu çıkarım geçersizdir. Bu ise, $p \wedge q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r$ sembolik çıkarımının geçersiz olduğunu gösterir.

SIRA SİZDE 3

$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \therefore (p \vee q)$ çıkarımının geçersiz olduğunu, bu sembolik çıkarımı gündelik dilde geçersiz bir çıkarıma çevirerek gösteriniz.

Özet

Gündelik dil önermelerini ve çıkarımlarını önermeler mantığında sembolleştirebilmek.

Bir gündelik dil önermesinin, önermeler mantığının sembolik dilindeki bir sembolik önerme olarak karşılığı, bu önermenin önermeler mantığında sembolleştirilmesidir. Bir çıkarımın önermeler mantığında sembolleştirilmesi ise, çıkarımı oluşturan önermelerin önermeler mantığında sembolleştirilmesinden ve öncüllerle sonuç önermesi arasına ∴ işaretinin konulmasından ibarettir.

Bir gündelik dil önermesinin semantik statüsünün önermeler mantığı bakımından belirlenmesi, bu önermenin, totoloji mi, çelişme önermesi mi, yoksa olumsal önerme mi olduğunun ortaya konması demektir. Bir çıkarımın denetlenmesi ise, çıkarımın geçerli mi geçersiz mi olduğunun ortaya konması demektir. Bir gündelik dil önermesinin semantik statüsünün önermeler mantığı bakımından belirlenebilmesi veya bir gündelik dil çıkarımının önermeler mantığı bakımından denetlenebilmesi için, öncelikle bu önermenin veya çıkarımın önermeler mantığında sembolleştirilmesi gerekir. Bu ünitede, Kalish-Montague (1980) tarafından kullanılan üç aşamalı bir yol izledik.

Bir gündelik dil önermesini veya çıkarımını önermeler mantığında sembolleştirebilmek için, ilk olarak, basit önermelerin hangi önerme değişkenleriyle karşılanacağının belirlenmesi gerekir. Sembolleştirme sonucunda hangi sembolik önermenin elde edileceği, sembolleştirme anahtarına bağlı olarak değişir. Bir gündelik dil önermesinde veya çıkarımında geçen her bir farklı basit önermeyi farklı bir önerme değişkeni ile eşleştiren bir listeye, "sembolleştirme anahtarı" denir. Hangi sembolik önerme veya çıkarımın elde edileceği, sembolleştirme anahtarına bağlı olarak değişir.

Sembolleştirmenin aşamaları şu şekilde sıralanabilir:

1. adım: Önerme eklemlerinin eşanlamlıları yerine standart önerme eklemlerinin yazılarak, ve, noktalamaya uygun olarak, parantezler yerleştirilerek, önermenin standart biçimi elde edilir.

2. adım: Önerme eklemlerinin yerine önerme eklemi sembolleri konur.

3. adım: Basit önermeler yerine, sembolleştirme anahtarında verilen önerme değişkenleri konur.

4. adım: İstenirse, okumada kolaylık sağlamak amacıyla, kimi parantezler ikinci ünitede belirttiğimiz işlem önceliği kurallarına göre kaldırılabilir.

Gündelik dildeki bir önermenin veya çıkarımın önermeler mantığı bakımından denetlenmesi iki adımda gerçekleşir: İlk olarak gündelik dil önermesi veya çıkarımı açıkça belirtilen bir sembolleştirme anahtarına göre doğru biçimde sembolleştirilir. İkinci adımda, elde ettiğimiz sembolik önermenin semantik statüsünü veya çıkarımın geçerliliğini, ikinci ünitede gördüğümüz doğruluk tablosu yöntemi ile (ya da başka bir yöntem ile) denetleyebiliriz.

Önermeler mantığı bakımından, hangi sembolleştirme anahtarını kullandığımız, sonuç olarak elde ettiğimiz sembolik önermenin semantik statüsünü ya da elde ettiğimiz sembolik çıkarımın geçerli olup olmadığını etkilemez. Tüm basit önermeleri farklı birer önerme değişkeni ile sembolleştirmek şartı ile, elde edeceğimiz tüm sembolik önerme ve çıkarımlar aynı sonucu verecektir.

Sembolik önerme ve çıkarımları gündelik dile çevirebilmek ve gündelik dildeki önerme ve çıkarımları önermeler mantığında denetleyebilmek.

Gündelik dile çevirme işlemi, sembolleştirme işleminin tersidir. Dolayısıyla, gündelik dile çevirme işleminde, gündelik dil önermelerini sembolleştirirken yaptığımız işlemlerin tersini yapacağız. Adım adım belirtirsek:

1. adım: Verilen sembolik önermede, kısaltma amacıyla eksik bırakılmış parantezler yerine konur.

2. adım: Sembolik önermede geçen önerme değişkenleri yerine, çeviri anahtarında belirtilen gündelik dil önermeleri konur.

3. adım: Önerme eklemi sembolleri yerine önerme eklemleri konur.

4. adım: Elde edilen ifadeyi doğal bir gündelik dil önermesine dönüştürmek için, parantezler kaldırılarak istenen önerme eklemlerinin yerine eşanlamlıları ve uygun noktalama işaretleri yerleştirilir.

Gündelik dile çevirme, bir sembolik çıkarımın geçersiz olduğunu göstermek için bir yöntem olarak da kullanılabilir. 2. Ünitede "MANTIĞIN TEMEL KAVRAMLARI" kısmında çıkarım kavramını incelerken, bir tek durumda bir çıkarımın geçersiz olduğuna çıkarımı oluşturan önermelerin gerçek doğruluk değerlerine göre karar verebileceğimizi söylemiştik: Eğer, tüm öncülleri doğru ve sonuç önermesi yanlış ise, o çıkarım geçersizdir. Bir $A, B, C, \ldots \therefore S$ çıkarımının geçersiz olduğunu göstermek istediğimizi kabul edelim. Bunun için, uygun bir çeviri anahtarı seçerek, sembolik çıkarımı tüm öncülleri doğru ancak sonuç önermesi yanlış olacak şekilde gündelik dile çevirmemiz yeterlidir.

Kendimizi Sınayalım

1. p: Ahmet başarılı bir öğrencidir.

q: Ahmet tüm derslerinden geçmiştir

r: Ahmet kopya çekmiştir.

Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, aşağıdakilerden hangisi “Eğer kopya çekmişse, Ahmet tüm derslerinden geçmesi durumunda bile başarısız bir öğrencidir” gündelik dil önermesinin sembolik önermeler mantığının dilindeki karşılığıdır?

a. $(r \rightarrow (p \vee q))$
b. $((r \rightarrow (q \rightarrow \sim p))$
c. $((r \vee \sim r) \rightarrow p)$
d. $(\sim r \rightarrow (p \vee q))$
e. $(r \rightarrow (p \rightarrow q))$

p: Satranç zeka geliştiren bir spordur.

q: Satrançta başarılı olmak için sabırlı olmak gerekir.

r: Ahmet satrançta başarılı bir oyuncudur.

s: Ahmet sabırlı bir oyuncudur.

t: Ahmet son oynadığı satranç oyununu kaybetmiştir.

u: Başarılı satranç oyuncuları bazı oyunları kaybedebilir.

2-5 sorularını yukarıdaki sembolleştirme ve çeviri anahtarına göre yanıtlayınız.

2. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, aşağıdakilerden hangisi “Ahmet sabırlı ve satrançta başarılı bir oyuncu olmasına rağmen, eğer Ahmet son oynadığı satranç oyununu kaybetmiş ise başarılı satranç oyuncuları bazı oyunları kaybedebilir” gündelik dil önermesinin sembolik önermeler mantığının dilindeki karşılığıdır?

a. $((s \rightarrow u) \vee r)$
b. $(u \leftrightarrow ((s \wedge r) \wedge t))$
c. $(((s \wedge r) \wedge t) \rightarrow u)$
d. $(u \rightarrow (\sim s \vee (s \wedge t)))$
e. $((s \wedge r) \wedge (t \rightarrow u))$

3. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, aşağıdakilerden hangisi “Satranç zeka geliştiren bir spor ise, sabırsız bir oyuncu olan ve son oynadığı satranç oyununu kaybeden Ahmet aynı zamanda satrançta başarısız bir oyuncudur” gündelik dil önermesinin sembolik önermeler mantığının dilindeki karşılığıdır?

a. $(p \rightarrow ((\sim s \wedge t) \wedge \sim r))$
b. $(p \rightarrow ((s \wedge t) \wedge r))$
c. $(p \rightarrow (\sim s \rightarrow (t \vee \sim r)))$
d. $(p \rightarrow ((\sim s \vee t) \wedge \sim r))$
e. $((p \rightarrow \sim s) \wedge (t \wedge \sim r))$

4. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, “Satrançta başarılı olmak için sabırlı olmak gerekirse, başarılı bir satranç oyuncusu olan Ahmet son oynadığı satranç oyununu kaybetmemiştir.” gündelik dil önermesinin sembolik önermeler mantığının dilindeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(q \rightarrow (r \vee \sim t))$
b. $(q \rightarrow (\sim r \wedge \sim t))$
c. $(q \rightarrow (r \wedge \sim t))$
d. $((q \rightarrow r) \wedge \sim t)$
e. $((q \rightarrow \sim r) \wedge \sim t)$

5. Yukarıdaki çeviri anahtarına göre, $(u \rightarrow (t \wedge r))$ sembolik önermesinin gündelik dile çevirisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Başarılı satranç oyuncuları bazı oyunları kaybedebiliyorsa, Ahmet ya başarılı bir satranç oyuncusudur ya da başarılı satranç oyuncuları bazı oyunları kaybedebilir.
b. Başarılı satranç oyuncuları bazı oyunları kaybedebiliyorsa, son oynadığı satranç oyununu kaybetmesine rağmen Ahmet başarılı bir satranç oyuncusudur.
c. Başarılı satranç oyuncuları bazı oyunları kaybedebiliyorsa, Ahmet başarılı bir satranç oyuncusu ise son oynadığı satranç oyununu kaybetmiştir.
d. Başarılı satranç oyuncuları bazı oyunları kaybedebiliyorsa, Ahmet başarılı bir satranç oyuncusu ise son oynadığı satranç oyununu kaybetmemiştir.
e. Başarılı satranç oyuncuları bazı oyunları kaybedebiliyorsa, Ahmet başarısız bir satranç oyuncusu ise son oynadığı satranç oyununu kaybetmiştir.

p: Öğrenmenin yaşı yoktur.

q: Ayşe İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmiştir.

r: Ayşe İngilizce’yi çok iyi konuşur.

s: Ayşe İngilizce’de hatasız yazar.

t: Ayşe Almanca öğrenmek istemektedir.

u: Ayşe Almanca’yı öğrenebilir.

v: Almanca öğrenmek isteyenler için pek çok kaynak kitap vardır.

6-10 sorularını yukarıdaki sembolleştirme ve çeviri anahtarına göre yanıtlayınız.

6. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, “Ayşe İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmesine rağmen, İngilizce’yi çok iyi konuşur ve İngilizce’de hatasız yazarsa, öğrenmenin yaşı yoktur” gündelik dil önermesinin sembolik önermeler mantığının dilindeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(p \rightarrow (q \wedge (r \wedge s)))$

b. $(p \rightarrow (q \leftrightarrow (\mathrm{r} \wedge s)))$

c. $(q \wedge ((r \wedge s) \rightarrow p))$

d. $((q \vee (r \wedge s)) \rightarrow p)$

e. $(q \rightarrow (\sim s \wedge \sim t))$

7. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, “Ancak öğrenmenin yaşının olmaması durumunda, İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmesine rağmen, Ayşe İngilizce’yi çok iyi konuşur ve İngilizce’de hatasız yazar” gündelik dil önermesinin sembolik önermeler mantığının dilindeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(p \rightarrow (q \wedge (r \wedge s)))$

b. $p \leftrightarrow (q \vee (r \wedge s)))$

c. $((p \leftrightarrow q) \vee (r \wedge s))$

d. $((p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s))$

e. $p \leftrightarrow (q \wedge (r \wedge s)))$

8. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, “Ayşe’nin İngilizce’yi çok iyi konuşup İngilizce’de hatasız yazmasının gerekli bir şartı, Ayşe İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmemiş olması veya öğrenmenin yaşının olmamasıdır” önermesinin sembolik önermeler mantığının dilindeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(r \wedge s) \rightarrow \sim(q \vee \sim p)$

b. $(r \wedge s) \rightarrow \sim(q \vee p)$

c. $(r \wedge s) \rightarrow (\sim q \vee \sim p)$

d. $(r \wedge s) \rightarrow (\sim q \vee p)$

e. $(r \vee s) \rightarrow \sim(q \vee \sim p)$

9. Yukarıdaki çeviri anahtarına göre, $(t \wedge q \rightarrow v \wedge u)$ sembolik önermesinin gündelik dile çevirisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Ayşe Almanca’yı öğrenmek istiyor ve İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmişse, Almanca öğrenmek isteyenler için pek çok kaynak kitap olduğuna göre Ayşe Almanca’yı öğrenebilir.

b. Ayşe Almanca’yı öğrenmek istiyorsa, Ayşe İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmiştir ve, Almanca öğrenmek isteyenler için pek çok kaynak kitap olduğuna göre, Ayşe Almanca’yı öğrenebilir.

c. Ayşe Almanca’yı öğrenmek istiyorsa ve İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmiş olması Ayşe’nin Almanca’yı öğrenmesi için yeterli ise, Almanca öğrenmek isteyenler için pek çok kaynak kitap olduğuna göre, Ayşe Almanca’yı öğrenebilir.

d. Ayşe Almanca’yı öğrenmek istiyorsa ve İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmişse, Almanca öğrenmek isteyenler için pek çok kaynak kitap olması Ayşe’nin Almanca’yı öğrenmesi için yeterlidir

e. Ayşe Almanca’yı öğrenmek istiyorsa ve İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmişse, Almanca öğrenmek isteyenler için pek çok kaynak kitap olması Ayşe’nin Almanca’yı öğrenebilmesi için gerekli bir şarttır.

10. Yukarıdaki çeviri anahtarına göre, $(\sim p \rightarrow q \wedge (t \wedge \sim u))$ sembolik önermesinin gündelik dile çevirisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Öğrenmenin yaşının olmaması, İngilizce’yi 50 yaşında öğrenen ve Almanca’yı da öğrenmek isteyen Ayşe’nin Almanca’yı öğrenmesi için gerekli bir şarttır.

b. Öğrenmenin yaşının olmadığı doğru değilse, Ayşe İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmiş olmasına rağmen, Almanca’yı da öğrenmek ister ama öğrenemez.

c. Öğrenmenin yaşının olmaması Ayşe’nin İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmiş olması için gereklidir ama, Ayşe Almanca’yı öğrenmek istese de öğrenemez.

d. Öğrenmenin yaşının olmadığı doğru değilse, Almanca’yı da öğrenmek isteyen Ayşe, İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmiş ise Almanca’yı öğrenemez.

e. Öğrenmenin yaşı yoksa, Almanca’yı da öğrenmek isteyen Ayşe, İngilizce’yi 50 yaşında öğrenmiş ise Almanca’yı öğrenemez.

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
2. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
3. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
4. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
5. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Gündelik Dile Çevirme” konusuna bakınız.
6. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin ““Sembolleştirme” konusuna bakınız.
7. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
8. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
9. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Gündelik Dile Çevirme” konusuna bakınız.
10. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Gündelik Dile Çevirme” konusuna bakınız.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

1. **adım:** (((Ali zengin olur ve Ali kendi işini kurar) ise Ali’ye piyangodan büyük ikramiye çıkar) ise (değildir Ali zengin olur ve değildir Ali kendi işini kurar))
2. **adım:** (((Ali zengin olur ∧ Ali kendi işini kurar) → Ali’ye piyangodan büyük ikramiye çıkar) → (~Ali zengin olur ∧ ~ Ali kendi işini kurar))
3. **adım:** $(((p \wedge q) \rightarrow \mathrm{r}) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q))$

Sıra Sizde 2

Birinci öncül:

1. **adım:** ((Kedi insanın yakın dostudur ve köpek insanın yakın dostudur) ve (kedi bakımı zordur ve köpek bakımı zordur))
2. **adım:** ((Kedi insanın yakın dostudur ∧ köpek insanın yakın dostudur) ∧ (kedi bakımı zordur ∧ köpek bakımı zordur))
3. **adım:** $((p \wedge q) \wedge (r \wedge s))$
4. **adım:** $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$

İkinci öncül:

1. **adım:** (Ahmet yaşlıdır ve (Ahmet köpek sahibidir ve Ahmet köpeğine çok iyi bakmaktadır))
2. **adım:** (Ahmet yaşlıdır ∧ (Ahmet köpek sahibidir ∧ Ahmet köpeğine çok iyi bakmaktadır))
3. **adım:** $(t \wedge (u \wedge v))$
4. **adım:** $t \wedge (u \wedge v)$

Sonuç önermesi:

1. **adım:** (Ahmet köpeğini çok sever veya değildir köpek bakımı zordur)
2. **adım:** (Ahmet köpeğini çok sever ∨ ~ köpek bakımı zordur)
3. **adım:** $(y \vee \sim s)$
4. **adım:** $y \vee \sim s$

$$(p \wedge q) \wedge (r \wedge s),\ \mathrm{t} \wedge (u \wedge v)\ \therefore\ y \vee \sim s$$

Sıra Sizde 3

Aşağıdaki çeviri anahtarını kabul edelim:

p: Bugün Dünya Ay ile Güneş arasına girmiştir.

q: Bugün Ay tutulması olmuştur.

Bu çeviri anahtarına göre, $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)\ \therefore\ (p \vee q)$ sembolik çıkarımının gündelik dile çevirisi: “Bugün Dünya Ay ile Güneş ay arasına girmişse bugün Ay tutulması olmuştur. Bugün Ay tutulması olmuşsa bugün Dünya Ay ile Güneş arasına girmiştir. O halde, bugün Dünya Güneş ile Ay arasına girmiştir veya bugün Ay tutulması olmuştur” çıkarımıdır. Bu çıkarım, Ay tutulmasının olmadığı günlerde öncülleri doğru ve sonucu yanlış olduğundan, geçersizdir.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. (2000). **Sembolik Mantık El Kitabı.** (3 cilt). Ankara: METU Press.

Grünberg, T. ve Onart, A. vd. (2003). **Mantık Terimleri Sözlüğü.** Ankara: METU Press.

Kalish, D., Montague R., Mar, G. (1980) **Logic: Techniques of Formal Reasoning.** 2. Baskı. New York: Oxford University Press.

Ural, Ş. (1995). **Temel Mantık.** İstanbul: Çantay Kitabevi.

Yıldırım, C. (1976). **100 Soruda Mantık.** İstanbul: Gerçek Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999). **Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi.** İstanbul: Bilgi Yayınevi.

SEMBOLİK MANTIK

4

Amaçlarımız

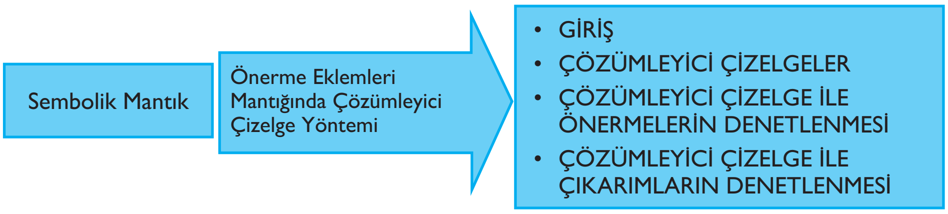
Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Çözümleyici çizelge kurallarını açıklayabilecek,
- Çözümleyici çizelge yöntemi ile önerme eklemleri mantığında önermelerin doğruluk değerini ve semantik statüsünü denetleyebilecek,
- Çözümleyici çizelge yöntemi ile önerme eklemleri mantığında çıkarımların geçerliliğini ve önermelerin birlikte tutarlı olup olmadığını denetleyebileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Çözümleyici çizelge kuralları
- Bir önermenin çözümleyici çizelgesi
- Bir çıkarımın çözümleyici çizelgesi
- Açık ve kapalı dal

İçerik Haritası



Önerme Eklemleri Mantığında Çözümleyici Çizelge Yöntemi

GİRİŞ

İkinci ünitede, bir önermenin doğruluk tablosunu nasıl oluşturacağımızı, doğruluk tablosu yöntemi ile bir önermenin semantik statüsünü nasıl belirleyebileceğimizi ve bir çıkarımın geçerliliğini nasıl denetleyebileceğimizi görmüştük. Bu ünitede, önermeler mantığı için bir diğer denetleme yöntemi olan çözümleyici çizelge yöntemini ele alacağız.

Bu ünitenin ilk kısmında, çözümleyici çizelgenin ne olduğunu, çözümleyici çizelge yöntemine neden gerek duyulduğunu ve önerme eklemleri için çözümleyici çizelge kurallarını öğreneceğiz. İkinci kısımda, önerme eklemlerine ait çözümleyici çizelge kurallarını kullanarak, bir önermenin çözümleyici çizelgesini nasıl oluşturabileceğimizi göreceğiz. Bu kısımda ayrıca, çözümleyici çizelgeleri, önermeler mantığında sembolik önermeler için doğrulayıcı ve yanlışlayıcı yorumlama bulmak ve sembolik önermelerin semantik statüsünü belirlemek için bir yöntem olarak nasıl kullanacağımızı da göreceğiz. Üçüncü kısımda, bir çıkarımın çözümleyici çizelgesini oluşturmayı ve çözümleyici çizelgeleri çıkarımların geçerliliğini denetleme yöntemi olarak kullanabilmeyi öğreneceğiz.

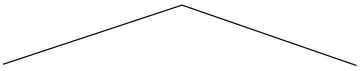
ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGELER

İkinci ünitede gördüğümüz gibi, doğruluk tablosu yöntemi ile bir önermenin semantik statüsünü belirleyebilir, bir çıkarımın geçerliliğini denetleyebiliriz. Ancak, doğruluk tablosu yöntemi önermeler mantığı için çok kullanışlı bir yöntem değildir. Bunun nedeni, doğruluk tablosundaki satır sayısının, göz önünde bulundurmamız gereken önerme değişkenlerinin sayısı ile orantılı olarak çok hızlı artmasıdır. İkinci ünitede söylediğimiz gibi, bir önermede ya da çıkarımda geçen önerme değişkenlerinin sayısı n ise, bu önermenin ya da çıkarımın doğruluk tablosundaki satır sayısı 2^n olmalıdır. Buna göre, bir önerme ya da çıkarımın doğruluk tablosundaki satır sayısı, eğer bu önerme veya çıkarımda 4 önerme değişkeni geçiyorsa $2^4 = 16$, eğer 5 önerme değişkeni geçiyorsa $2^5 = 32$, 6 önerme değişkeni geçiyorsa $2^6 = 64$ olur. Bu büyüklükte bir doğruluk tablosunu hata yapmadan oluşturmaya çalışmak, oldukça zor ve yorucudur. Dolayısıyla, önermeler mantığı için daha kullanışlı denetleme yöntemleri geliştirmek ve kullanmak gereklidir.

Çözümleyici çizelge yöntemi, bu amaçla geliştirilmiş denetleme yöntemlerinden biridir. Çözümleyici çizelge yönteminde, her önerme eklemi için çözümleyici çizelge kuralları tanımlanır. Çizelgedeki her önerme, ana-eklemine ait kurala göre

Bir önermenin çözümleyici çizelgesi, bu önermenin doğru olması için gereken koşulların bir çizgesini (grafiğini) verir.

işlem görür. Çözümleyici çizelge yönteminin ana fikri, bir önermenin doğru olması için gereken koşulların bir çizgesini (grafiğini) oluşturmaktır. Çözümleyici çizelge kuralları bu ana fikre göre kolaylıkla anlaşılabilir. Çözümleyici çizelge kuralları alt alta yazma kuralları ve çatal açma kuralları biçimindedir. “Çatal açma” ile kastettiğimiz çizelgeye aşağıdaki biçimde iki yeni dal eklemektir:

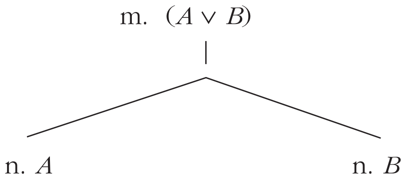


“Alt alta yazma” kuralları ise, yeni dallara yol açmadan, sadece mevcut dala yeni bir ya da iki önerme eklememizi gerektiren kurallardır.

Tümel-evetleme: $(A \wedge B)$ tümel-evetleme önermesinin doğru olması için, A ve B önermelerinin birlikte doğru olmaları gereklidir. Buna göre tümel-evetleme önermesine ait çözümleyici çizelge kuralı aşağıdaki gibidir:

m. $(A \wedge B)$
|
n. A
n+1. B

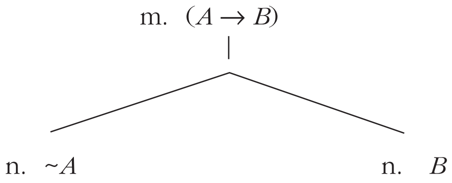
Tikel-evetleme: $(A \vee B)$ tikel-evetleme önermesinin doğru olması için, A ve B önermelerinden en az birinin doğru olması gereklidir. Buna göre, $(A \vee B)$ tikel-evetleme önermesine ait çözümleyici çizelge kuralı aşağıdaki gibidir:



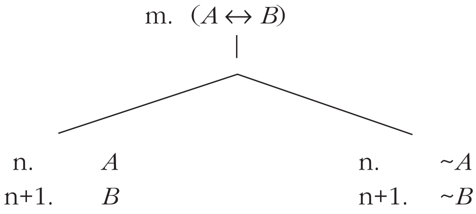
DİKKAT

Çizelgedeki iki noktanın arasında başka noktalar olabileceğinden “|“ dikey çizgi, sembolünü kullandık. Örneğin, yukarıdaki çizelgede $(A \vee B)$ bileşik önermesine çözümleyici çizelge kuralı hemen uygulanmayıp daha sonraya bırakılmış olabilir. Bazı örneklerde bu durumun ortaya çıktığını görebilirsiniz.

Koşul eklemi: $(A \rightarrow B)$ koşul önermesinin doğru olması için, ya A ön-bileşeni yanlış olmalı (dolayısıyla, $\sim A$ önermesi doğru olmalı) ya da B ard-bileşeni doğru olmalıdır. Buna göre, $(A \rightarrow B)$ koşul önermesine ait çözümleyici çizelge kuralı aşağıdaki gibidir:



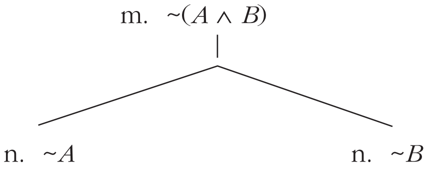
Karşılıklı koşul eklemi: $(A \leftrightarrow B)$ karşılıklı-koşul önermesinin doğru olması için, A ve B önermelerinin ya ikisi birden doğru olmalı, ya da ikisi birden yanlış olmalıdır. Buna göre, $(A \leftrightarrow B)$ karşılıklı-koşul önermesine ait çözümleyici çizelge kuralı aşağıdaki gibidir:



Çözümleyici çizelgeleri önermeler mantığı için bir denetleme yöntemi olarak kullanabilmek için, bu kuralların dışında, değilleme kurallarına da ihtiyaç vardır. Değilleme kuralları, çözümleyici çizelgede bir bileşik önermenin değillemesinin nasıl ele alınacağını belirtir.

Çözümleyici çizelgede değillenmiş bileşik önermelere uygulanacak işlemler değilleme kuralları ile belirlenir.

Tümel-evetlemenin değillenmesi: İkinci üniteden bildiğiniz gibi, $\sim(A \wedge B)$ ve $(\sim A \vee \sim B)$ önermeleri eşdeğerdir. Bu durumda, tümel-evetleme önermesinin değillenmesi kuralı, tikel-evetleme eklemine ait çözümleyici çizelge kuralına göre tanımlanır:



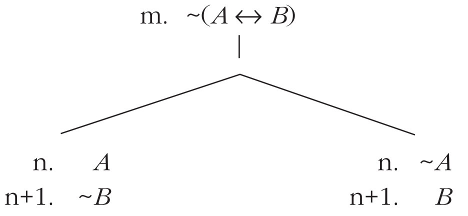
Tikel-evetlemenin değillenmesi: İkinci üniteden bildiğiniz gibi, $\sim(A \vee B)$ ve $(\sim A \wedge \sim B)$ önermeleri eşdeğerdir. Bu durumda, tümel-evetleme önermesinin değillenmesi kuralı, tikel-evetleme eklemine ait çözümleyici çizelge kuralına göre tanımlanır:

m. $\sim(A \vee B)$
|
n. $\sim A$
n+1. $\sim B$

Koşul önermesinin değillenmesi: İkinci üniteden bildiğiniz gibi, $\sim(A \rightarrow B)$ ve $(A \wedge \sim B)$ önermeleri eşdeğerdir. Bu durumda, koşul önermesinin değillenmesi kuralı, tümel-evetleme eklemine ait çözümleyici çizelge kuralına göre tanımlanır:

m. $\sim(A \rightarrow B)$
|
n. A
n+1. $\sim B$

Karşılıklı-koşul önermesinin değillenmesi: İkinci üniteden bildiğiniz gibi, $\sim(A \leftrightarrow B)$ önermesi, $((A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B))$ önermesine eşdeğerdir. Bu durumda, tikel-evetleme ve tümel evetleme kurallarına göre, karşılıklı koşul önermesinin değillenmesine ait çözümleyici çizelge kuralı aşağıdaki şekilde tanımlanır:



Çifte değilleme kuralı: İkinci üniteden bildiğiniz gibi, ~~*A* önermesi, *A* önermesine eşdeğerdir. Buna göre, çifte değilleme (değillemenin değillenmesi) kuralı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{array}{ll} \text{m.} & {\sim}{\sim}A \\ & \quad | \\ \text{n.} & \quad A \end{array}$$

ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGE İLE ÖNERMELERİN DENETLENMESİ

Bir Önermenin Çözümleyici Çizelgesinin Oluşturulması

Sembolik önermeler mantığında herhangi bir *bileşik* önermenin biçimi şunlardan kesinlikle biridir: ~*A*, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$. Yani, daha açık ifade edersek, sembolik önermeler mantığında herhangi bir sembolik önerme:

a. Ya bir önerme değişkeni, ya bir değilleme önermesi, ya bir tümel-evetlemeli önerme, ya bir tikel-evetlemeli önerme, ya bir koşul önermesi, ya da karşılıklı-koşul önermesidir ve
b. Bu biçimlerden sadece birine sahiptir.

Sembolik önermeler mantığında her sembolik önermenin bir tek biçimi ve, bileşik önerme ise, bir tek ana-eklemi vardır.

Dolayısıyla, sembolik önermeler mantığında, bir sembolik önermenin bu biçimlerden birine sahip olmaması veya bu biçimlerden birden fazlasına sahip olması mümkün değildir. Buna göre, bir sembolik önermenin, örneğin, hem biçimi ~*A* olan bir değilleme önermesi hem de biçimi $(A \wedge B)$ olan bir tümel-evetlemeli önerme olması mümkün değildir. Sembolik önermeler mantığının dilinin (ve daha sonraki ünitelerde ele alacağımız sembolik niceleme mantığının dilinin) “tekbiçimlilik” olarak adlandırılan bu sentaktik özelliği, basit bir gözlem değil kanıtlanması gereken bir yönüdür. Ancak, bu kanıtlama daha ileri mantık derslerinin konusu olduğundan, burada bu önemli özelliği sadece belirtmekle yetiniyoruz. Tek-biçimliliğin önemi, bir sembolik önermeye hangi kuralı uygulayacağımızdan emin olmamızı sağlamasıdır. Örneğin, bir önermenin hem biçimi ~*A* olan bir değilleme önermesi hem de biçimi $(A \wedge B)$ olan bir tümel-evetlemeli önerme olabileceğini kabul edelim. Bu önermenin doğruluk tablosunu ya da çözümleyici çizelgesini yaparken, tümel evetleme kuralını mı, yoksa değilleme kurallarından birini mi uygulayacağımızı bilemezdik.

Çözümleyici çizelgedeki her numaralı önerme çizelgede bir nokta, 1 numaralı tepe noktasına çizelgenin kökü, kökten itibaren aşağıya doğru birbirini izleyen önermeler dizisine bir dal denir.

Şimdi, önermeler mantığında bir sembolik önermenin çözümleyici çizelgesini nasıl oluşturacağımızı görelim. Çizelgeden bahsederken, çizelgedeki her numaralı önermeye bir “nokta”, 1. numaralı noktaya çizelgenin “kökü”, kökten en aşağıya kadar birbirini izleyen noktalara bir “dal” adını vereceğiz.

Belirttiğimiz gibi, çözümleyici çizelgesini yapmak istediğimiz önerme, ya bir önerme değişkenidir ya da, bir bileşik önerme ise, ~*A*, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ biçimlerinden kesinlikle birine sahip olacaktır. Eğer, önerme bir önerme değişkeni ise, çözümleyici çizelgesi basitçe aşağıdaki gibidir:

1. *A*

Eğer kökteki önerme bir bileşik önerme ise, o önermenin ana-eklemine ait çözümleme kuralına göre devam edilir. Bu şekilde devam edilerek dallar oluşturulur. Çizelgeye yazdığımız her bir önermenin numarasını ve bu önermenin hangi noktaya çözümleyici çizelge kuralı uygulanmasından dolayı yazıldığının belirtilmesi gerekir. Hangi çözümleyici çizelge kuralının uygulandığını belirtmeye gerek yoktur. Çünkü hangi noktadaki önermeye işlem uygulandığı biliniyorsa, zaten o önermeye uygulanabilecek eleme kuralı, açıkça, önermenin ana-eklemine ait eleme kuralıdır. Buna göre, çözümleyici çizelgedeki -kök hariç- tüm önermeler aşağıdaki biçimde yazılmalıdır.

n. *A* (k)

Burada n. kökten itibaren sayıldığında *A* önermesinin kaçıncı önerme olduğunu belirtir. Çizelgedeki önermelere sayı vererek, bu önermelere işaret ederek kural uygulayabiliriz. (k) sayısı *A* önermesinin hangi noktadaki önermeye kural uygulayarak elde edildiğini gösterir. Dikkat edilmesi gereken önemli bir kural, başka bir dala ait önermeye göre ilerlememektir. Bir dalda ilerlerken, sadece o daldaki önermelere işlem uygulanabilir.

DİKKAT

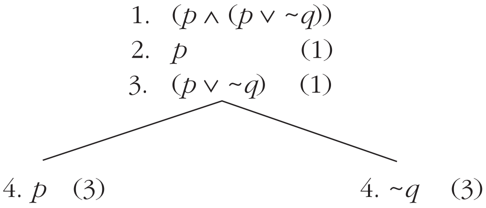
Bir dalda ilerlerken, sadece o daldaki önermelere işlem uygulanabilir. Başka bir dala ait önermeye göre ilerlemek yanlıştır.

Bir dalda birbirinin değili olan iki önerme ortaya çıkmış ise, o dal "kapalıdır" denir ve bu durum ortaya çıktığında, o dalda daha fazla devam etmeden, hemen dalın altına bir × (çarpı) işareti konarak, bu işaretin yanına o dalın hangi iki noktasının birbirinin değili olduğu belirtilir. Dal kapanmış ise ya da dalda çözümleyici çizelge kurallarından birini uygulayabileceğimiz hiçbir bileşik önerme kalmamış ise, o dal *tamamlanmış* bir daldır. Tüm dallar tamamlandığında çizelge de tamamlanmıştır. Çizelge tamamlandığında, tüm dallar kapanır ise, çizelge kapalıdır.

Hem *A* hem ~*A* önermesi içeren bir dal kapalıdır. Tüm dalları kapanan bir çizelge kapalıdır. Bir dal kapanmış ise, ya da işlem uygulanmamış bir bileşik önerme içermiyorsa tamamlanmıştır. Tüm dalları tamamlanmış bir çizelge tamamlanmıştır.

ÖRNEK

$(p \wedge (p \vee \sim q))$ sembolik önermesinin çözümleyici çizelgesini oluşturalım.



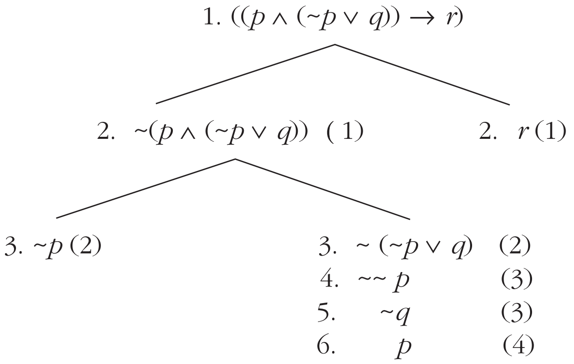
Kök noktasına $(p \wedge (p \vee \sim q))$ önermesinin kendisini 1 numarasıyla yazdık. Bu önermenin ana eklemi tümel-evetleme eklemi olduğundan, hemen alttaki 2 ve 3 numaralı iki noktaya ana bileşenleri alt alta yazdık. Dalda herhangi bir *A* önermesi için hem *A* hem de ~*A* önermesi ortaya çıkmadığından ilerlemeye devam etmeliyiz. Dalda bileşik önerme olarak sadece $(p \vee \sim q)$ bulunduğundan, bu dalda ilerlemek için yapılması gereken ve yapılabilecek tek şey, $(p \vee \sim q)$ tikel-evetleme önermesine kural uygulamaktır. Tikel-evetlemenin çözümleyici çizelge kuralı gereği açtığımız çatalın iki ucundaki noktalara p ve $\sim q$ önermelerini yazdık. Ortaya çıkan her iki dalda da işlem uygulanmamış bir bileşik önerme bulunmamaktadır. Çizelge tamamlanmıştır.

DİKKAT

İşlem uyguladığınız bileşik önermelerin yanına isterseniz bir işaret koyarak, yaptığınız işlemleri takip edebilir ve işlem uygulanmamış bir bileşik önerme kalmadığından emin olabilirsiniz.

ÖRNEK

$((p \wedge (\sim p \vee q)) \rightarrow r)$ sembolik önermesinin çözümleyici çizelgesini oluşturalım.



SIRA SİZDE 1

$\sim(p \leftrightarrow (\sim q \leftrightarrow p))$ önermesinin doğruluk çizelgesini oluşturunuz.

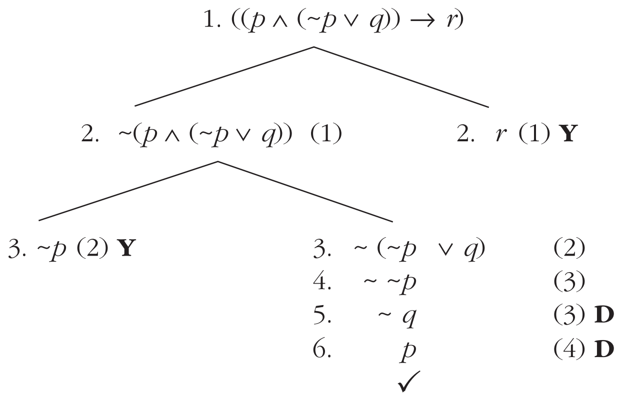
Çözümleyici Çizelge İle Bir Önermenin Doğruluk Değerinin Denetlenmesi

Çözümleyici çizelgesini yaparak, bir önermenin bir doğruluk değerlemesindeki doğruluk değerini hesaplayabiliriz.

Bir önermenin çözümleyici çizelgesini yaparak, önermenin verilen bir doğruluk değerlemesine göre alacağı doğruluk değerini belirleyebiliriz. Bunun için, çizelgenin köküne önermeyi yazarak çözümleyici çizelge kurallarına göre ilerleriz. Bir dalda ortaya çıkan her önerme değişkenine ya da değillemesine, verilen doğruluk değerlemesine göre doğruluk değerini yazarız. Eğer dalda **Y** değeri ortaya çıkarsa, o dal yanlıştır ve o dalda daha fazla ilerlemeyiz. Eğer tamamlanan bir dalda tüm değerler **D** ise, yani o tamamlanmış daldaki tüm önerme değişkenleri ve değillenmiş değişkenler **D** değerini almış ise, o dal doğrudur denir. Çizelge tamamlandığında en az bir dal doğru ise, çizelgesini yaptığımız önerme bize verilen doğruluk değerlemesinde doğrudur. Çizelgeyi yaparken tamamlanmış bir doğru dal ortaya çıkarsa, daha fazla devam etmeden, önermenin verilen doğruluk değerlemesinde doğru olduğunu söyleyebiliriz. Eğer tüm dallar yanlış ise, önerme bize verilen doğruluk değerlemesinde yanlıştır. Bu nedenle, bir tek yanlış dala bakarak önermenin verilen doğruluk değerlemesinde yanlış olduğunu söyleyemeyiz. Önermenin verilen doğruluk değerlemesinde yanlış olduğunu söyleyebilmek için tüm dalların yanlış olması gerekir.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemiyle $((p \wedge (\sim p \vee q)) \rightarrow r)$ sembolik önermesinin p: ***D****, q:* ***Y****, r:* ***Y*** *doğruluk değerlemesine göre alacağı değeri hesaplayalım.*



Ortada ✓ ile işaretlediğimiz tamamlanmış dalda tüm değerler **D** olduğundan bu dal doğrudur. Bir önermenin verilen doğruluk değerlemesine göre doğru olması için bir doğru dal bile yeterli olduğundan, $((p \wedge (\sim p \vee q)) \rightarrow r)$ önermesinin p : **D**, q : **Y**, r : **Y** doğruluk değerlemesine göre doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Çözümleyici Çizelge İle Bir Önerme İçin Doğrulayıcı Yorumlama Oluşturulması

Çözümleyici çizelge yöntemi ile herhangi bir sembolik önerme için doğrulayıcı yorumlama olup olmadığını denetleyebiliriz. Bir önermenin çözümleyici çizelgesi tamamlandığında, kapanmadan kalan her dal o önerme için bir doğrulayıcı yorumlama sağlar.Doğrulayıcı yorumlama şu şekilde oluşturulur:

a. Açık kalan dalda bir önerme değişkeni değillemesiz olarak geçiyor ise, o önerme değişkenine **D** değeri verilir.

b. Açık kalan dalda önerme değişkeni değillemeli olarak geçiyor ise, o önerme değişkenine **Y** değeri verilir.

c. Bir önerme değişkeni önermede geçtiği halde, açık kalan tamamlanmış bir dalda bu önerme değişkeni ne değillemeli ne de değillemesiz olarak geçmeyebilir. *O dala göre yorumlama yazarken*, bu durumdaki değişkenlere istediğimiz değeri verebiliriz. Dolayısıyla, dalda değillemeli veya değillemesiz geçmeyen her değişken bize iki ayrı doğrulayıcı yorumlama sağlar.

Bir sembolik önermenin çözümleyici çizelgesindeki açık kalan tamamlanmış dallara göre önerme için doğrulayıcı yorumlama oluşturabiliriz.

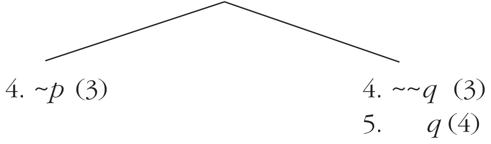
Az önceki örnekte çizelgesini yaptığımız $((p \wedge (\sim p \vee q)) \rightarrow \mathrm{r})$ sembolik önermesinin çözümleyici çizelgesinde en az bir açık dal olduğundan, bu sembolik önermenin doğrulayıcı yorumlaması vardır. Yani bu sembolik önerme tutarlıdır. Şimdi en soldaki açık dala göre bir doğrulayıcı yorumlama oluşturalım. Bu dalda $\sim p$ geçtiğine göre p önerme değişkenine **Y** değerini vermeliyiz. Bu dal tamamlanmış olmasına rağmen, sadece $\sim p$ geçtiğinden, önermede geçen diğer önerme değişkenleri q ve r doğrulayıcı yorumlamada hem **D** hem **Y** değeri alabilir. Buna göre, bu daldan elde edilecek tüm doğrulayıcı yorumlamalar şunlardır:

1. p : **Y**, q : **D**, r : **D**
2. p : **Y**, q : **D**, r : **Y**
3. p : **Y**, q : **Y**, r : **D**
4. p : **Y**, q : **Y**, r : **Y**

ÖRNEK

Çözümleyici çizelgesini oluşturarak, $\sim(p \vee (p \wedge \sim q))$ önermesi için bir doğrulayıcı yorumlama bulalım.

1. $\sim(p \vee (p \wedge \sim q))$
2. $\sim p$ (1)
3. $\sim(p \wedge \sim q)$ (1)



4. $\sim p$ (3)

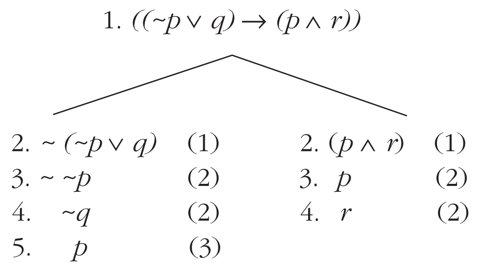
4. $\sim\sim q$ (3)
5. q (4)

Çizelge tamamlandığı halde, tamamlanan iki dal da açıktır. Bu nedenle, iki dala bakarak da birer doğrulayıcı yorumlama oluşturabiliriz. Soldaki açık dalda q değişkeni ne değillemeli ne de değillemesiz geçmediğinden, bu dala göre elde edeceğimiz iki doğrulayıcı yorumlama: p: **Y**, q: **D** ve p: **Y**, q: **Y** yorumlamalarıdır. Sağdaki açık da-

Tamamlanmış bir açık dala göre yorumlama yazarken, o dalda geçmeyen önerme değişkenlerinin değerini “hem **D** hem de **Y** değerini alabilir” anlamında **D/Y** olarak belirtebiliriz.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $((\sim p \vee q) \to (p \wedge r))$ *önermesi için doğrulayıcı yorumlama oluşturalım.*

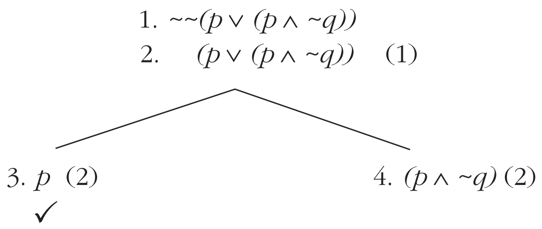


Çizelge tamamlanmış ve her iki dal da açık kalmıştır. Soldaki dala göre oluşturabileceğimiz doğrulayıcı yorumlamalar p : **D**, q : **Y**, r : **D/Y** doğruluk değerlemeleridir. Sağdaki açık dala göre ise, p : **D**, q : **D/Y**, r : **D** doğruluk değerlemeleri doğrulayıcı yorumlamalar olarak elde edlir.

Bir önermenin çözümleyici çizelgesinde *tamamlanmış* bir açık dal elde edildiğinde, diğer dalları tamamlamaya gerek duymadan, bu açık dala göre bir doğrulayıcı yorumlama yazabiliriz.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelgesini oluşturarak, $\sim\sim(p \vee (p \wedge \sim q))$ *önermesi için bir doğrulayıcı yorumlama bulalım.*



Çizelge tamamlanmadığı halde, soldaki tamamlanmış açık dala göre bir doğrulayıcı yorumlama oluşturabiliriz. Bu dalda p önerme değişkeni değillemesiz geçtiğinden, p değişkenine **D** değerini vermeliyiz. Ancak bu dalda q değişkeni ne değillemeli ne de değillemesiz geçmediğinden, q doğrulayıcı yorumlamada hem **D** hem de **Y** değerini alabilir. Buna göre, bu daldan elde edeceğimiz *iki* doğrulayıcı yorumlama şunlardır:

p: **D**, q: **D/Y**

DİKKAT

Tamamladığımız bir çözümleyici çizelgeye göre, doğrulayıcı yorumlama yazarken, sadece bir açık dala göre yorumlama oluşturmaya dikkat etmeliyiz. Bir açık dala göre bir önerme değişkenine, bir başka dala göre bir diğer önerme değişkenine değer atamak başlangıçta sık yapılan hatalardan biridir.

SIRA SİZDE 2

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $(p \leftrightarrow (\sim q \wedge p))$ önermesi için varsa bir doğrulayıcı yorumlama oluşturunuz.

Çözümleyici Çizelge İle Bir Önerme İçin Yanlışlayıcı Yorumlama Oluşturulması

Bildiğiniz gibi, bir önermenin yanlışlayıcı yorumlaması o önermeyi yanlış yapan doğruluk değerlemesidir. Bir önermenin yanlış olması, önermenin değilinin doğru olması demek olduğundan, bir A önermesi için yanlışlayıcı yorumlama aramak, önermenin değili olan $\sim A$ önermesi için doğrulayıcı yorumlama aramak demektir. Buna göre, çözümleyici çizelge yöntemi ile, bir önerme için yanlışlayıcı yorumlama ararken, kök olarak $\sim A$ önermesini yazarak çözümleyici çizelge kurallarına göre ilerleriz. Tamamlanmış açık kalan her dal, $\sim A$ önermesine doğrulayıcı yorumlama sağladığından, A önermesi için bir yanlışlayıcı yorumlama sağlar.

ÖRNEK

Yukarıdaki örnekte, $\sim\sim(p \vee (p \wedge \sim q))$ *önermesi için doğrulayıcı yorumlama bulmuştuk. Buna göre, bu yorumlamalar* $\sim(p \vee (p \wedge \sim q))$ *önermesinin yanlışlayıcı yorumlamalarıdır.*

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $((\sim p \vee q) \rightarrow \sim(p \wedge r))$ *önermesi için yanlışlayıcı yorumlama oluşturalım.*

1. $\sim ((\sim p \vee q) \rightarrow \sim(p \wedge r))$
2. $(\sim p \vee q)$ (1)
3. $\sim\sim (p \wedge r)$ (1)
4. $(p \wedge r)$ (3)

5. $\sim p$ (2)
6. p (4)
7. r (4)
×

5. q (2)
6. p (4)
7. r (4)
✓

Sağdaki tamamlanmış açık dala göre, p: **D**, q: **D**, r: **D** olduğu durumda $\sim((\sim p \vee q) \rightarrow \sim(p \wedge r))$ önermesi doğru, dolayısıyla $((\sim p \vee q) \rightarrow \sim(p \wedge r))$ önermesi yanlıştır. Bu durumda, p: **D**, q: **D,** r: **D** doğruluk değerlemesi $((\sim p \vee q) \rightarrow \sim(p \wedge r))$ önermesinin yanlışlayıcı yorumlamasıdır. 4 numaralı önerme olan $(p \wedge r)$ önermesinin her iki dalda da ayrı ayrı işlem gördüğüne dikkat ediniz. Bu önerme her iki dala da aittir ve bu nedenle her iki dalda da kullanılabilir.

İkinci ünitede, bir önermenin totoloji olmasının, önermenin değillemesinin çelişki önermesi olması demek olduğunu açıklamıştık. Buna göre, bir A sembolik önermesinin totoloji önermesi olup olmadığını, $\sim A$ önermesinin çözümleyici çizelgesini oluşturarak denetleyebiliriz. Eğer $\sim A$ önermesinin çözümleyici çizelgesinde tüm dallar kapanırsa, $\sim A$ önermesinin doğrulayıcı yorumlaması yok demektir. Yani, A önermesinin yanlışlayıcı yorumlaması yoktur ve A önermesi bir totolojidir. $\sim A$ önermesinin tamamlanmış çözümleyici çizelgesinde en az bir açık dal kalırsa, $\sim A$ önermesinin en az bir doğrulayıcı yorumlaması var demektir. Yani, A önermesinin yanlışlayıcı yorumlaması vardır ve A önermesi bir totoloji değildir.

Bir önermenin değilinin çözümleyici çizelgesi kapanır ise, önerme totolojidir.

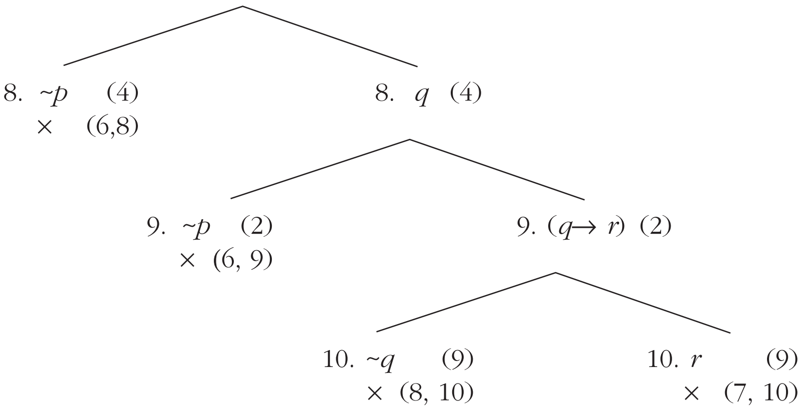
ÖRNEK *$(p \to (q \to p))$ önermesinin bir totoloji önermesi olduğunu, çözümleyici çizelge yöntemi ile gösterelim:*

1. $\sim(p \to (q \to p))$
2. p (1)
3. $\sim(q \to p)$ (1)
4. q (3)
5. $\sim p$ (3)

× (2,5)

ÖRNEK *$((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ önermesinin bir totoloji önermesi olduğunu, çözümleyici çizelge yöntemi ile gösterelim:*

1. $\sim((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$
2. $(p \to (q \to r))$ (1)
3. $\sim((p \to q) \to (p \to r))$ (1)
4. $(p \to q)$ (3)
5. $\sim(p \to r)$ (3)
6. p (5)
7. $\sim r$ (5)



Bir önermenin çözümleyici çizelgesini oluştururken, çoğu zaman birden çok seçenek karşımıza çıkar. Bir dalda ilerlerken ortaya çıkan iki ya da daha fazla sayıda bileşik önermeden hangisini ilk olarak ele alacağımıza karar vermek durumunda kalırız. Aşağıdaki iki ipucunun faydalı olacağını göreceksiniz:

1. Çözümleyici çizelge yöntemi ile bir önermenin doğrulayıcı veya yanlışlayıcı yorumlamasını ararken, çatal açmamızı gerektiren kuralların alt alta yazmamızı gerektiren kurallara önceliği vardır.
2. Çözümleyici çizelge yöntemi ile ~*A* önermesinin çözümleyici çizelgesini oluşturarak *A* önermesinin totoloji olduğunu göstermeye çalışırken, alt alta yazma gerektiren kuralların çatal açmamızı gerektiren kurallara önceliği vardır.

Bu ipuçlarının açıklaması basittir. Doğrulayıcı veya yanlışlayıcı yorumlama ararken, açık bir dal elde etmek istediğimizden olabildiğince fazla sayıda dal üretmeye çalışmalıyız. *A* önermesinin totoloji önermesi olduğunu göstermek için ~*A* önermesinin çözümleyici çizelgesini tamamlayıp tüm dalları kapatmaya çalıştığımızda ise, olabildiğince az dal oluşturarak çizelgeyi tamamlamaya çalışmamız gerekir.

ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGE İLE ÇIKARIMLARIN DENETLENMESİ

Bildiğiniz gibi, bir çıkarımın geçerli olması, tüm öncüllerin doğru olması halinde sonucun yanlış olamaması demektir. Buna göre, bir çıkarımın geçerli olup olmadığını denetlemek öncüller ile sonuç önermesinin değillemesinin birlikte doğru olup olamayacağını denetlemek demektir. Dolayısıyla, çözümleyici çizelge ile bir çıkarımın geçerliliğini denetlemek için, ilk noktalara öncülleri ve sonucun değillemesini yazar ve çözümleyici çizelge kurallarına göre ilerleriz. Sonuç olarak, bir çıkarımın çözümleyici çizelgesi aşağıdaki ilk noktalarla başlayan çizelgedir:

1. Birinci öncül
2. İkinci öncül
...
n n.inci öncül
n+1 Sonucun değili

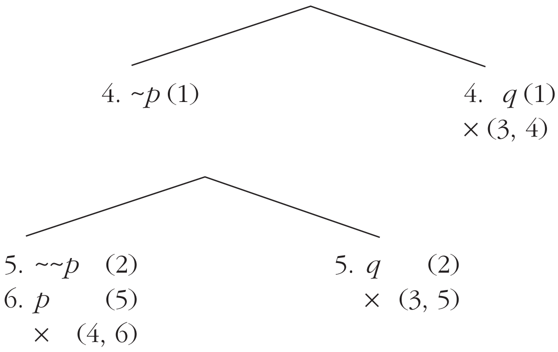
Çıkarımın çözümleyici çizelgesinde tüm dalların kapanması durumunda, öncüller ile sonucun değillemesi birlikte doğru olamayacağından, denetlediğimiz çıkarım geçerlidir. Eğer, çizelge tamamlandığında açık en az bir dal kalırsa, bu dala göre, öncüller ve sonuç önermesinin değilini birlikte doğru yapan bir yorumlama vardır ve çıkarım geçersizdir.

Bir çıkarımın geçerliliğini çözümleyici çizelge ile denetlerken tepe noktalara alt alta öncülleri ve sonuç önermesinin değilini yazarız. Tüm dallar kapanırsa çıkarım geçerlidir. Tamamlanmış bir dal açık kalırsa çıkarım geçersizdir.

ÖRNEK

p → q, ~p → q ∴ q çıkarımının geçerliliğini çözümleyici çizelge yöntemi ile denetleyelim.

1. $p \to q$ (Öncül)
2. $\sim p \to q$ (Öncül)
3. $\sim q$ (Sonucun değili)

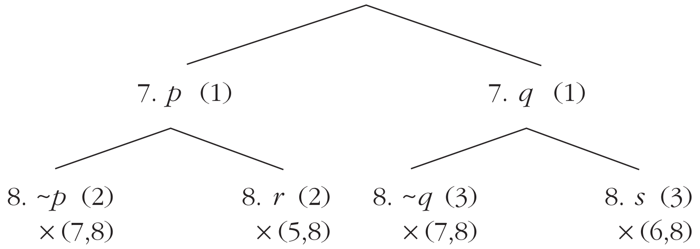


Çizelgede tüm dallar kapandığı için, $p \to q$, $\sim p \to q$ ve $\sim q$ önermeleri birlikte doğru olamaz. Dolayısıyla, $p \to q, \sim p \to q \therefore q$ çıkarımı geçerlidir.

ÖRNEK

$p \vee q$, $p \rightarrow r$, $q \rightarrow s$ $\therefore$ $r \vee s$ çıkarımının geçerliliğini çözümleyici çizelge yöntemi ile denetleyelim.

1. $p \vee q$ (Öncül)
2. $p \rightarrow r$ (Öncül)
3. $q \rightarrow s$ (Öncül)
4. $\sim(r \vee s)$ (Sonucun değili)
5. $\sim r$ (4)
6. $\sim s$ (4)



Sağdaki iki dalın, çizelgedeki 2 numaralı önerme olan ($p \rightarrow r$) önermesine işlem uygulanmadan kapandığına dikkat ediniz. Bir önermeye işlem uygulamadan bırakıp, o dalın açık kaldığını söyleyemeyiz ancak bir dalı o daldaki bir önermeye işlem uygulamadan kapatmamız çözümleyici çizelge kurallarına uygundur.

Bir çıkarımın geçerli olmasının, çıkarımın öncüllerinin sonucun değillemesi ile birlikte tutarsız olması demek olduğunu, bir çıkarımın geçersiz olmasının da çıkarımın öncüllerinin sonucun değillemesi ile birlikte tutarlı olması demek olduğunu biliyorsunuz. Genel olarak, çözümleyici çizelge yöntemi ile bir grup önermenin birlikte tutarlı olduğunu göstermek için kökten başlayarak bu önermeleri alt alta yazar ve çözümleyici çizelge kurallarına göre ilerleyerek çizelgeyi tamamlarız. Tüm dallar kapanır ise, bu önermelerin tümünün birlikte doğru olamayacağı anlaşılır ve dolayısıyla bu önermeler birlikte tutarsızdır. En az bir açık dal kalırsa, bu dala göre bu önermelerin tümünü birden doğru yapan bir yorumlama oluşturulabilir ve dolayısıyla bu önermeler birlikte tutarlıdır.

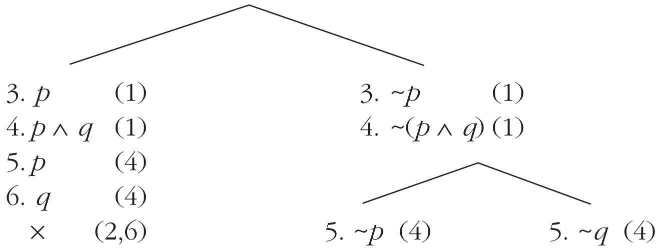
Çözümleyici çizelge ile bir grup önermenin birlikte tutarlı olduğunu gösterirken çatal açma kurallarının, birlikte tutarsız olduğunu gösterirken ise alt alta yazma kurallarının önceliği vardır. Çıkarımın geçerliliğini göstermek için, öncüller ile sonucun değilinin birlikte tutarsız olduğun göstermemiz gerektiğinden, çıkarımın denetlenmesinde de alt alta yazma kurallarının önceliği vardır.

Bir grup önermenin birlikte tutarlı olup olmadığını denetlerken bu önermeleri tepedeki ilk noktalara alt alta yazarak oluşturduğumuz çözümleyici çizelgede açık dal ararız. Açık kalan tamamlanmış bir dal bize bu önermeleri birlikte doğrulayan bir yorumlama verir.

ÖRNEK

($p \leftrightarrow (p \wedge q)$), $\sim q$ önermelerinin birlikte tutarlı olduğunu çözümleyici çizelge yöntemi ile gösterelim:

1. $p \leftrightarrow (p \wedge q)$
2. ~q



Çizelgenin tamamlanmasına rağmen sağdaki her iki dal da açık kaldığından $(p \leftrightarrow (p \wedge q))$, $\sim q$ önermelerini birlikte doğrulayan bir yorumlama oluşturulabilir. Bu dalların her ikisine göre de, p: **Y**, q: **Y** yorumlaması, $(p \leftrightarrow (p \wedge q))$, $\sim q$ önermelerini birlikte doğrulayan bir yorumlamadır.

ÖRNEK

$(p \leftrightarrow (p \wedge q))$, p, $\sim q$ önermelerinin birlikte tutarsız olduğunu çözümleyici çizelge yöntemiyle gösterelim.

1. $p \leftrightarrow (p \wedge q)$
2. p
3. $\sim q$

4. p	(1)	4. $\sim p$	(1)
5. $p \wedge q$	(1)	5. $\sim(p \wedge q)$	(1)
6. p	(5)	× (2,4)	
7. q	(5)		
× (3,7)			

Tüm dallar kapandığı için $(p \leftrightarrow (p \wedge q))$, p, $\sim q$ önermelerini birlikte doğru yapan bir yorumlama bulunamaz. Bu nedenle, $(p \leftrightarrow (p \wedge q))$, p, $\sim q$ önermeleri birlikte tutarsızdır. Sağdaki dalın, o dalda ortaya çıkan 5 numaralı $\sim(p \wedge q)$ önermesine işlem uygulamaya gerek kalmadan kapandığına ddikat ediniz.

SIRA SİZDE 3

$(p \vee q)$, $\sim p$, $\sim q$ önermelerinin birlikte tutarlı olup olmadığını çözümleyici çizelge yöntemi ile denetleyiniz.

Özet

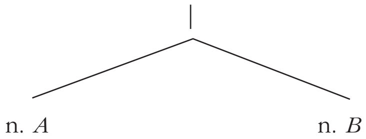
Çözümleyici çizelge kurallarını açıklayabilmek,
Bir önermenin çözümleyici çizelgesi, o önermenin doğru olması için gereken şartların bir çizgesidir. Buna göre, önerme eklemlerine ait çözümleyici çizelge kuralları şu şekilde tanımlanır:

Tümel-evetleme: m. $(A \wedge B)$

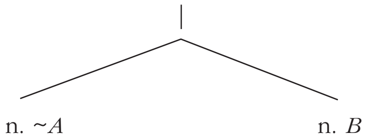
n. A

n+1. B

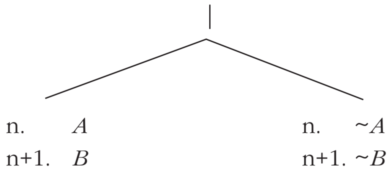
Tikel-evetleme: m. $(A \vee B)$



Koşul: m. $(A \rightarrow B)$

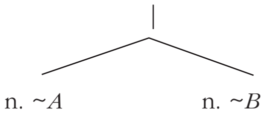


Karşılıklı-koşul: m. $(A \leftrightarrow B)$



Bunlardan başka, çözümleyici çizelge yöntemi için bir de, değilleme kurallarına ihtiyaç vardır:

Tümel-evetlemenin değillenmesi: m. $\sim(A \wedge B)$



Tikel-evetlemenin değillenmesi: m. $\sim(A \vee B)$

n. $\sim A$

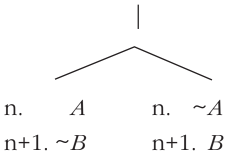
n+1. $\sim B$

Koşulun değillenmesi: m. $\sim (A \rightarrow B)$

n. A

n+1. ~B

Karşılıklı-koşulun değillenmesi: m. $\sim(A \leftrightarrow B)$



Çifte değilleme: m. $\sim\sim A$

n. A

Çözümleyici çizelge yöntemi ile önerme eklemleri mantığında önermelerin doğruluk değerini ve semantik statüsünü denetleyebilmek,
Bir önermenin çözümleyici çizelgesini oluşturmak için, 1 ile numaralanan “kök” noktasına önermenin kendisi yazılır ve önermelerin anaeklemlerine ait çözümleyici çizelge kurallarına göre ilerlenir. Kökten en alt noktaya kadar birbirini izleyen önermelere bir dal denir. Bir dalda bir önermenin kendisi ve değili ortaya çıkarsa o dal kapalıdır. Kapalı bir dal ya da işlem uygulanacak bir bileşik önerme kalmamış bir dal tamamlanmıştır. Tüm dallar tamamlandığında çizelge de tamamlanmıştır.

a) Verilen bir doğruluk değerlemesine göre önermenin doğruluk değeri hesaplanırken, önermenin kendisinin çözümleyici çizelgesi yapılır. Bir dalda ortaya çıkan önerme değişkenlerine ve değillenmiş önerme değişkenlerine, verilen doğruluk değerlemesine göre **D** veya **Y** değeri verilir. Eğer bir dalda, bir değişken ya da değillenmiş değişken **Y** değerini alırsa, o dal yanlıştır. Tüm tamamlanmış dallar yanlış ise, önerme verilen doğruluk değerlemesinde yanlıştır, en az bir tamamlanmış doğru dal (tüm değişkenlerin ve değillenmiş değişkenlerin **D** değerini aldığı dal) varsa, önerme verilen doğruluk değerlemesinde doğrudur.

b) Bir önerme için doğrulayıcı yorumlama ararken, önermenin kendisinin çözümleyici çizelgesi yapılır ve tamamlanmış bir açık dal aranır. Böyle bir dal varsa, bu dala göre doğrulayıcı yorumlama yazılabilir: Bu dalda ortaya çıkan önerme değişkenleri **D** değerini, değili ortaya çıkan önerme değişkenleri **Y** değerini almalıdır. Hiç ortaya çıkmayan önerme değişkenleri ise hem **D** hem de **Y** değerini alabilir.

c) Bir *A* önerme için yanlışlayıcı yorumlama aramak, önermenin değili için doğrulayıcı yorumlama aramaktır. Bu nedenle, *A* önermesine yanlışlayıcı yorumlama ararken, ~*A* önermesinin çözümleyici çizelgesinde tamamlanmış açık dal aranır. Böyle bir dal bulunursa, bir önceki maddedeki gibi yorumlama oluşturulur.

d) Bir önermenin değilinin hiçbir doğrulayıcı yorumlaması yoksa, önermenin yanlışlayıcı yorumlaması yok demektir. Buna göre, bir önermenin totoloji olduğunu göstermek için, önermenin değilinin tamamlanmış çözümleyici çizelgesinde hiçbir açık dal olmadığını göstermek gereklidir.

Çözümleyici çizelge yöntemini etkili kullanabilmek için, kimi kuralların yeni dal açmak gerektirdiğini, kimi kuralların ise yeni bir dala yol açmadan alt alta yazma gerektirdiğini göz önünde bulundurarak şu ipuçlarını değerlendiririz.

a) Doğrulayıcı veya yanlışlayıcı yorumlama ararken, dal açma gerektiren kuralların alt alta yazma gerektiren kurallara önceliği vardır.

b) Bir önermenin totoloji olduğunu göstermeye çalışırken alt alta yazma kurallarının, dal açma gerektiren kurallara önceliği vardır.

c) Bir önermenin doğruluk değeri hesaplanırken alt alta yazma kurallarının, dal açma gerektiren kurallara önceliği vardır.

Çözümleyici çizelge yöntemi ile önerme eklemleri mantığında çıkarımların geçerliliğini ve önermelerin birlikte tutarlı olup olmadığını denetleyebilmek.
Bildiğiniz gibi, bir çıkarımın geçerli olması, çıkarımın öncüllerinin sonucun değillemesi ile birlikte tutarsız olması demektir. Bir çıkarımın geçersiz olması ise, çıkarımın öncüllerinin sonucun değillemesi ile birlikte tutarlı olması demektir. Çözümleyici çizelge yöntemi ile, bir grup önermenin birlikte tutarlı olduğunu göstermek için kökten başlayarak bu önermeleri alt alta yazar ve çözümleyici çizelge kurallarına göre ilerleyerek çizelgeyi tamamlarız. Tüm dallar kapanır ise, bu önermelerin tümünün birlikte doğru olamayacağı anlaşılır ve dolayısıyla bu önermeler birlikte tutarsızdır. En az bir açık dal kalırsa, bu dala göre bu önermelerin tümünü birden doğru yapan bir yorumlama oluşturulabilir ve dolayısıyla bu önermeler birlikte tutarlıdır. Buna göre, çıkarımın geçerli olması için aşağıdaki şekilde başlayan çözümleyici çizelgenin kapanması gerekir (Yani çizelgedeki tüm dalların kapanması gerekir).

1. Birinci öncül
2. İkinci öncül
...
n n.inci öncül
n+1 Sonucun değili

Çözümleyici çizelge ile, bir grup önermenin birlikte tutarlı olduğunu göstermeye çalışırken dal açma kurallarının, bir grup önermenin tutarsız olduğunu göstermeye çalışırken alt alta yazma kurallarının, çıkarımların geçerlilik denetlemesinde yine alt alta yazma kurallarının önceliği vardır.

Kendimizi Sınayalım

1. Çözümleyici çizelge yönteminin doğruluk tablosu yöntemine göre üstün bir yönü aşağıdakilerden hangisidir?

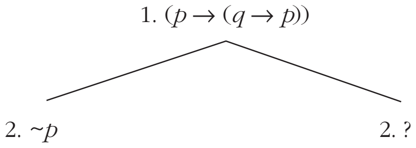
a. Daha kolay öğrenilmesi
b. Genel olarak daha kullanışlı bir yöntem olması
c. Daha doğru sonuçlar vermesi
d. Çözümleyici çizelge yönteminde hata yapmanın imkansız olması
e. Çözümleyici çizelge kurallarının sayısının daha az olması

2. Aşağıdaki çözümleyici çizelgede soru işaretli yere hangi önerme gelmelidir?

1. $\sim(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
2. p (1)
3. ? (1)

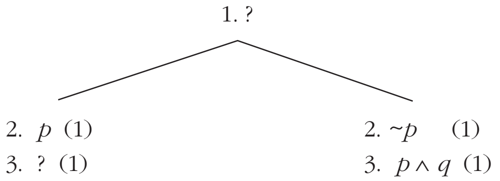
a. $\sim(q \rightarrow p)$
b. $\sim(p \rightarrow q)$
c. $(q \rightarrow p)$
d. $\sim(q \rightarrow q)$
e. $\sim(p \rightarrow p)$

3. Aşağıdaki çözümleyici çizelgede soru işaretli yere hangi önerme gelmelidir?



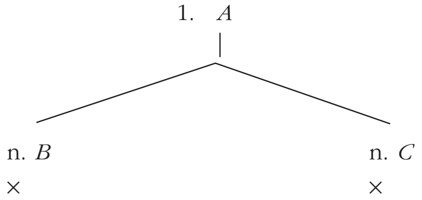
a. $(q \rightarrow p)$
b. $\sim(p \rightarrow q)$
c. q
d. $\sim q$
e. $\sim(p \rightarrow p)$

4. Aşağıdaki çözümleyici çizelgede soru işaretli yerlere hangi iki önerme gelebilir?



a. $p, p \wedge q$
b. $p \leftrightarrow \sim(p \wedge q), \sim(p \wedge q)$
c. $\sim(p \leftrightarrow \sim(p \wedge q)), \sim(p \wedge q)$
d. $p \leftrightarrow (p \wedge q), \sim(p \wedge q)$
e. $\sim(p \leftrightarrow (p \wedge q)), \sim(p \wedge q)$

5.



Yukarıdaki çözümleyici çizelgeye göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a. A önermesi totolojidir.
b. A önermesi olumsaldır.
c. Çözümleyici çizelge tamamlanmamıştır.
d. A önermesi çelişki önermesidir.
e. A önermesinin yanlışlayıcı yorumlaması yoktur.

6. Bir önermenin çelişki önermesi olduğunu göstermek için çözümleyici çizelge yöntemine göre ne yapılması gerekir?

a. Önermenin çözümleyici çizelgesini yapıp tüm dalların açık olduğunu göstermek
b. Önermenin çözümleyici çizelgesini yapıp tüm dalların kapalı olduğunu göstermek
c. Önermenin çizelgesini yapıp en az bir açık dal bulmak
d. Önermenin değilinin çizelgesini yapıp tüm dalların kapalı olduğunu göstermek
e. Önermenin değilinin çizelgesini yapıp tüm dalların açık olduğunu göstermek

7. Bir önermenin tutarlı olduğunu göstermek için çözümleyici çizelge yöntemine göre ne yapılması gerekir?

a. Önermenin çözümleyici çizelgesini yapıp tüm dalların açık olduğunu göstermek
b. Önermenin çözümleyici çizelgesini yapıp tüm dalların kapalı olduğunu göstermek
c. Önermenin çizelgesini yapıp en az bir açık dal bulmak
d. Önermenin değilinin çizelgesini yapıp tüm dalların kapalı olduğunu göstermek
e. Önermenin değilinin çizelgesini yapıp tüm dalların açık olduğunu göstermek

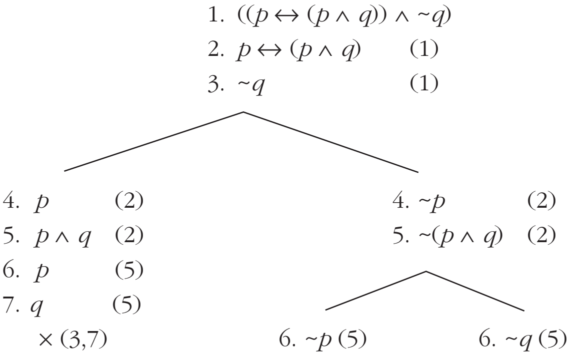
8. Bir çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için çözümleyici çizelge yöntemine ne yapılması gerekir?

a. Çıkarımın çözümleyici çizelgesini yapıp tüm dalların açık olduğunu göstermek
b. Çıkarımın çözümleyici çizelgesini yapıp tüm dalların kapalı olduğunu göstermek
c. Çıkarımın çizelgesini yapıp en az bir açık dal bulmak
d. Sonuç önermesinin değilinin çizelgesini yapıp tüm dalların kapalı olduğunu göstermek
e. Sonuç önermesinin değilinin çizelgesini yapıp tüm dalların açık olduğunu göstermek

9. Çözümleyici çizelge yöntemiyle ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

a. Çıkarımın geçerliliğini denetlerken dal açma kurallarının önceliği vardır.
b. Önermenin doğrulayıcı yorumlamasını bulurken alt alta yazma kurallarının önceliği vardır.
c. Önermenin yanlışlayıcı yorumlamasını bulurken dal açma kurallarının önceliği vardır.
d. Alt alta yazma kurallarının her zaman önceliği vardır.
e. Dal açma kurallarının her zaman önceliği vardır.

10.



1. $((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \wedge {\sim}q)$
2. $p \leftrightarrow (p \wedge q)$ (1)
3. ${\sim}q$ (1)

4. p (2)
5. $p \wedge q$ (2)
6. p (5)
7. q (5)
× (3,7)

4. ${\sim}p$ (2)
5. ${\sim}(p \wedge q)$ (2)

6. ${\sim}p$ (5)

6. ${\sim}q$ (5)

Yukarıdaki çözümleyici çizelgeye göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a. p: **Y**, q: **Y** doğruluk değerlemesi, $((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \wedge {\sim}q)$ önermesinin bir doğrulayıcı yorumlamasıdır.
b. p: **Y**, q: **Y** doğruluk değerlemesi, $((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \wedge {\sim}q)$ önermesinin bir yanlışlayıcı yorumlamasıdır.
c. $((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \wedge {\sim}q)$ önermesi bir çelişki önermesidir.
d. $((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \wedge {\sim}q)$ önermesi bir totoloji önermesidir.
e. $((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \wedge {\sim}q)$ önermesinin doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

Okuma Parçası

Mantık Felsefesi

1. Özel Bilimlerin Felsefesi

Her özel bilimin bir bilim felsefesi bulunduğu gibi, bağımsız bir bilim dalı olarak mantığın da bir bilim felsefesi, yani *mantık felsefesi* olmalıdır. Amacımız mantık felsefesinin belli başlı sorunlarını kısaca ortaya koymaktır. Ancak daha önce genel olarak bilim felsefesine ve özel olarak mantık felsefesine niye gereksinme olduğunu araştırmakta yarar vardır.

Herhangi bir bilim dalında o bilime özgü terimleri kapsayan birtakım önermelerin doğruluğu ileri sürülür. Kullanılan terimlerin anlamı aydınlatılır, ileri sürülen önermelerin de doğruluğu temellendirilir. Ancak bir terimin anlamını aydınlatmak için anlamı daha önce aydınlatılmış olan başka terimlere ve bir önermenin doğruluğunu temellendirmek için doğruluğu daha önce temellendirilmiş başka önermelere gerek vardır. Kısır döngü veya durmadan gerilemeye düşmemek için anlamı sezgisel olarak kavranılan ilkel terimler, yani *temel kavramlar* ve doğruluğu sezgisel olarak apaçık olan ilkel önermeler, yani *ilkeler'e* başvurmak kaçınılmaz bir zorunluluktur. Nitekim çeşitli bilim dallarında ilgili bilim adamları topluluğunun, üzerinde anlaştıkları birtakım temel kavramları ve ilkeleri paylaştıklarını ve tüm bilimsel çalışmalarını bu ortaklaşa kabul ettikleri temel kavram ve ilkelere dayandırdıklarım gözlemliyoruz. Thomas Kuhn'a göre bilimi bilim yapan ayırt edici bir özellik, bilim adamları topluluğunun temel kavramlar ve ilkeler üzerine anlaşmalarıdır. Ancak bu türlü anlaşmalar süresiz değildir. Kuhn'un *olağan bilim* dediği süreç ile sınırlanmıştır. Nitekim bilimsel etkinlikler ne denli başarılı olursa olsun gene de birtakım aykırılıklar (anomaliler) ortaya çıktığını görüyoruz. Bu durumda normal bilim süreci bir bunalım dönemine dönüşüp bilim adamları topluluğunda temel kavramlar ve ilkeler üzerindeki anlaşma ve görüş birliği zayıflayarak yerini gittikçe artan anlaşmazlık ve çatışmalara bırakır. Kuhn'un *olağandışı bilim* dediği bu süreçte bilim adamları topluluğunda eskileriyle uyuşmayan yeni temel kavramlar ve ilkeler (yani yeni bir paradigma) ortaya konulur. Temel kavramlar ve ilkeler olağan bilimin yöntemleriyle değerlendirilemediğinden, eski ile yeni paradigmalar arası seçim olağan bilimde yapılamaz. Bu aşamada bilim ile felsefe ve genellikle serbest kurgu (spekülasyon) arasındaki sınır kalkmıştır. İşte belli bir bilim dalına özgü bilim felsefesinin işlevi, bilimin yöntemleriyle değerlendirilemeyen temel kavramları ve ilkeleri inceleyip seçenekler arasında akla uygun seçimler yapılabilmesini sağlamaktır.

2. Mantık Felsefesi

Genel olarak bilim felsefesi hakkında söylediklerimize dayanarak mantık felsefesinin amacının mantık biliminin temel kavramlarım aydınlatmak ve ilkeleri temellendirmek olduğunu söyleyebiliriz. Ancak tüm ilgililerin görüş birliğini sağlayacak tek çözümler beklememek gerektiğini akıldan çıkarmamak gerekir.

Mantık felsefesinin belli başlı sorunlarını ortaya koymak için mantık biliminin en önemli temel kavramlarını ve ilkelerini belirtmeliyiz. Mantık kabaca doğru düşünmenin bilimidir. Düşünmenin kendisini psikoloji inceler, mantık ise yalnızca düşünmenin doğruluğunun veya daha belirgin olarak, düşünmenin en önemli süreci olan akıl yürütmenin geçerlilik kurallarım ortaya koymayı amaçlar. Çağdaş sembolik mantıkta bu geçerlilik kuralları çeşitli matematiksel sistemler olarak dile getirilmiştir. Tıpkı Eaclides, Lobatchevski ve Riemann geometri sistemleri gibi, birbiriyle bağdaşmayan matematiksel mantık sistemleri kurulmuştur. Ancak bir matematik dalı haline gelen günümüzün mantık bilimi çerçevesi içinde rakip mantık sistemlerini değerlendirip bunlar arasında akılcı bir seçim yapmak olanaksızdır. İşte böyle bir işlem ancak karşılaştırılan rakip sistemlerin dışına çıkarak mantık felsefesi açısından yapılabilir. Bu amaçla her düşünür doğru düşünme veya geçerli akıl yürütme hakkındaki kişisel sezgileriyle önerilen rakip mantık sistemleri arasında bir karşılaştırma yaparak hangisinin sezgilerine daha uygun olduğunu araştırır ve böylece birini seçer. Ancak aynı üşünürlerin sezgileri birbiriyle uyuşmayabildiğinden dolayı, rakip mantık sistemler seçebilirler. Mantık felsefesinde tanık olduğumuz bu çelişkili seçimleri doğal karşılamak gerekir.

Mantığın başlıca ilkelerine gelince, bunlar özdeşlik, çelişkisizlik ve üçüncü şıkkın olmazlığı ilkeleridir. Mantık ilkeleri denilen bu ilkeler mantık felsefesinde tartışma konusu olmaktadır.

Kaynak: Grünberg, T. (1991) "Mantık Felsefesi", **Felsefe Dünyası**, Sayı 2, s. 8-14,

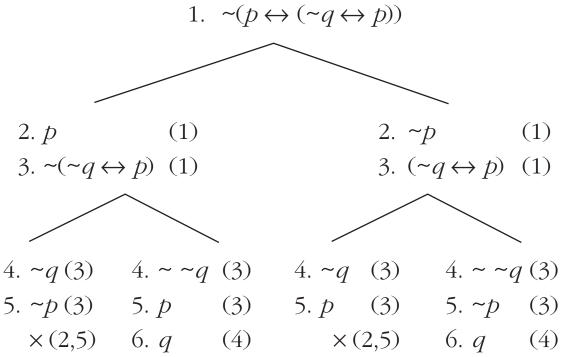
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
2. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
3. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
4. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
5. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelge İle Önermelerin Denetlenmesi" konusuna bakınız.
6. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelge İle Önermelerin Denetlenmesi" konusuna bakınız.
7. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelge İle Önermelerin Denetlenmesi" konusuna bakınız.
8. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelge İle Çıkarımların Denetlenmesi" konusuna bakınız.
9. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelge İle Önermelerin Denetlenmesi" konusuna bakınız.
10. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Çözümleyici Çizelge İle Önermelerin Denetlenmesi" konusuna bakınız.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

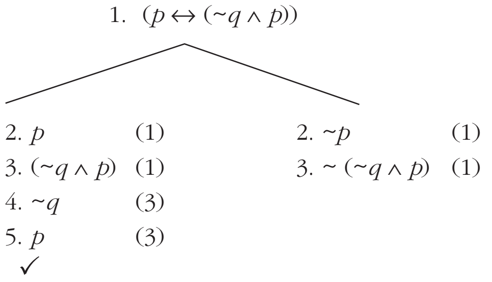
Sıra Sizde 1

$\sim(p \leftrightarrow (\sim q \leftrightarrow p))$ sembolik önermesinin doğruluk çizelgesini oluşturmak için, önermeyi kök noktasına yazıp, çözümleyici çizelge kurallarına göre ilerleriz:



Sıra Sizde 2

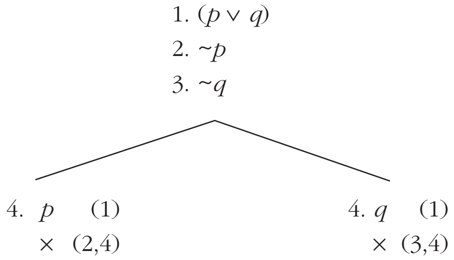
Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $(p \leftrightarrow (\sim q \wedge p))$ önermesi için doğrulayıcı yorumlama oluşturmak için, önermenin kendisinin çözümleyici çizelgesini yaparak açık kalan dal ararız:



İşaretlediğimiz tamamlanmış dala göre (sağ dalda daha fazla ilerlemeye gerek duymadan), p: **D**, q: **Y** değerlemesinin $(p \leftrightarrow (\sim q \wedge p))$ önermesi için bir doğrulayıcı yorumlama olduğunu söyleyebiliriz.

Sıra Sizde 3

Aşağıdaki çizelgede görüleceği gibi, $(p \vee q)$, $\sim p$, $\sim q$ önermeleri birlikte tutarsızdır. Tüm dallar kapalı olduğu için, bu önermeleri birlikte doğrulayan bir yorumlama bulunamaz.



Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. (2000). **Sembolik Mantık El Kitabı.** (3 cilt). Ankara: METU Press.

Grünberg, T. ve Onart, A. vd. (2003). **Mantık Terimleri Sözlüğü.** Ankara: METU Press.

Kalish, D., Montague R., Mar, G. (1980) **Logic: Techniques of Formal Reasoning.** 2. Baskı. New York: Oxford University Press.

Ural, Ş. (1995). **Temel Mantık.** İstanbul: Çantay Kitabevi.

Yıldırım, C. (1976). **100 Soruda Mantık.** İstanbul: Gerçek Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999). **Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi.** İstanbul: Bilgi Yayınevi.

SEMBOLİK MANTIK

5

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Niceleyici kavramını ve gündelik dildeki nicelemeli önermeleri açıklayabilecek,
- Niceleme mantığının sembolik dilinin temel kavramlarını açıklayabileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Yüklem
- Niceleyici
- Nicelemeli önerme
- Değişken
- Serbest ve bağlı değişken
- Bir nicelemenin etki alanı
- Açık formül
- Kapalı formül (önerme)
- Ön-nicelemeli normal biçim

İçerik Haritası

Sembolik Mantık

Yüklemler ve Niceleyiciler

- GİRİŞ
- GÜNDELİK DİLDE NİCELEMELİ ÖNERMELER
- NİCELEME MANTIĞININ SEMBOLİK DİLİ

Yüklem ve Niceleyiciler

GİRİŞ

Bundan önceki ünitelerde, önerme eklemlerinin mantıksal özelliklerini sembolik bir sistem biçiminde ortaya koyan standart sembolik önermeler mantığını ele aldık. Önermeler mantığı, bu üniteden itibaren ele almaya başlayacağımız niceleme mantığının da temelini oluşturmaktadır. Bir başka deyişle, niceleme mantığı önermeler mantığının üzerine kurulmuştur. Çünkü göreceğimiz gibi, niceleme mantığı “niceleyiciler” olarak adlandırılan ifadelerin yanı sıra, önerme eklemlerini de içermektedir ve önerme eklemleri, önermeler mantığında tanımladığımız doğruluk tablolarına ve çözümleyici çizelge kurallarına göre değerlendirilecektir. Bu nedenle, niceleme mantığı konusunda rahat ilerleyebilmek için önermeler mantığı konularını gerektikçe tekrar etmenizi öneriyoruz.

Bu ünitenin ilk kısmında, gündelik dildeki nicelemeli önermeleri ele alacağız. Bu önermeler, içinde “her” ve “bazı” ifadelerini veya bu ifadelerin eşanlamlılarını barındıran gündelik dil önermeleridir. Gündelik dilin nicelemeli önermelerinin temel özelliklerini kavramamız, sembolik niceleme mantığını öğrenirken ve daha sonra kullanırken, sezgisel bir bakış açısı geliştirmemizi sağlayacaktır.

Ünitenin ikinci kısmında, niceleme mantığının sembolik dilini ele alacağız. Niceleme mantığının sembolik dili, önermeler mantığının sembolik diline kıyasla çok daha zengin ve karmaşıktır. Bu sayede, niceleme mantığı ifade gücü oldukça yüksek bir mantık sistemidir. Felsefede ve bilimde karşımıza çıkan pek çok akıl yürütme niceleme mantığında sembolleştirilip denetlenebilir. Bu nedenle sağlam bir niceleme mantığı bilgisini edinmek, geçerli akıl yürütmeler geliştirmek ve geçersiz olanları saptayabilmek için oldukça yararlı bir araca sahip olmak demektir.

GÜNDELİK DİLDE NİCELEMELİ ÖNERMELER

Niceleme mantığında iki niceleyici temel olarak kabul edilir: “Her” kelimesiyle ifade edilen *tümel-niceleyici* ve “bazı” kelimesiyle ifade edilen *tikel-niceleyici.* İçinde “her” ve “bazı” ifadelerini veya bu ifadelerin eşanlamlılarını barındıran önermeler “nicelemeli önermeler”dir. Önerme eklemleri gibi, niceleyiciler de gündelik dilde farklı biçimlerde ifade edilebilmektedir. Bu eşanlamlı ifadelerle karşılaştığımızda, öncelikle bu ifadeleri standart niceleyicilerle değiştirip, buna göre işlem yapmamız gerekir.

Gündelik dilde, “her” ve “bazı” temel niceleyicileri dışında, “çoğu”, “birkaçı” gibi, başka niceleme ifadeleri de vardır. Çağdaş mantıkta bu gibi niceleyiciler de ele alınmaktadır. Ancak bu niceleyicilerin incelenmesi *şimdilik* temel mantığın bir konusu değildir.

Şimdi, tümel ve tikel-niceleyiciyi gündelik dilde ifade etmekte kullanılan kimi ifade biçimlerini ele alalım. Önermeler mantığı konusunda da belirttiğimiz gibi, gündelik dilin ifade zenginliği dolayısıyla gündelik dilde hangi ifadelerin niceleyici ifadeler olduğu ve bu ifadelerin ne şekilde yorumlanacağı kesin kurallarla belirlenemez. Bununla birlikte bize yardımcı olacak önemli noktaları ortaya koyabiliriz.

Tümel-niceleyici: Gündelik dilde, tümel-niceleyiciyi ifade etmek için “her” kelimesi yerine, “tüm”, “bütün” ifadeleri de kullanılmaktadır. Buna göre, aşağıdaki önermeler niceleme mantığı bakımından aynı yargıyı dile getirirler:

Her insan ölümlüdür.
Tüm insanlar ölümlüdür.
Bütün insanlar ölümlüdür.

Hiçbir niceleyici ifade kullanmadan da tümel-nicelemeli bir önerme ifade edilebilir. Nitekim “İnsan ölümlüdür” dediğimizde aslında “Her insan ölümlüdür” demek isteriz. “Cisimler ısıtılınca genleşir” önermesi de, “Her cisim ısıtılınca genleşir” anlamına gelir.

Ayrıca, “bir” ifadesi de çoğu zaman tümel-niceleyici anlamında kullanılır. Örneğin, “Bir sayı çift ise iki ile bölünür” önermesi “Her çift sayı iki ile bölünür” anlamına gelir.

Tikel-niceleyici: “Bazı” kelimesi yerine “kimi”, “en az bir” ifadeleri de tikel-niceleyici anlamında kullanılır. Buna göre, aşağıdaki önermeler niceleme mantığı bakımından aynı yargıyı dile getirirler:

Bazı insanlar filozoftur.
Kimi insanlar filozoftur.
En az bir insan filozoftur.

Tümel-niceleyiciyle eşanlamlı kullanılabildiğini söylediğimiz “bir” ifadesi kimi durumlarda tikel-niceleyiciyi ifade etmek için de kullanılır. Örneğin, “Bir filozof ‘İnsan herşeyin ölçüsüdür’ demiş” önermesinde “bir” ifadesi tikel-niceleyici anlamında kullanılmaktadır. Bu önermenin her filozofun ‘İnsan herşeyin ölçüsüdür’ dediği yargısını bildirmediği açıktır. Gördüğümüz gibi, “bir” ifadesinin hangi durumda tikel-niceleyiciyi, hangi durumlarda tümel-niceleyiciyi ifade ettiği konusunda dikkatli olmamız gerekir.

Nicelemeli önermeler sadece, F ve G “insandır”, “sarıdır” gibi birer yüklem olmak üzere, “Her şey F dir”, “Her F G dir” veya “Bazı şeyler F dir”, “Bazı F G dir” biçimindeki önermeler değildir. Niceleyicileri kullanarak daha karmaşık önermeler de elde edebiliriz. Şimdi, gündelik dilde daha karmaşık nicelemeli önermeler oluşturma yollarından bazılarını ele alalım.

Önerme eklemlerini birlikte ya da bir önerme eklemini birden çok kez önermelere uygulayabildiğimiz gibi, bir önermede niceleyici ifadeleri birlikte kullanabilir ya da, bir niceleyici ifadeyi birden çok kez uygulayabiliriz. Gündelik dilde karmaşık niceleme önermelerinin birçoğu böyle iç içe geçmiş niceleyicileri içeren önermelerdir. “Bazı insanlar tüm hayvanları sever”, “Tüm insanlar bazı hayvanları sever” önermeleri bu türden önermelerdir.

Önerme eklemlerini ilk kez ele aldığımız ikinci ünitede gördüğümüz gibi, herhangi bir önermeyi değilleyebilir ve herhangi iki önermeyi 2-li önerme eklemleri olan “ve”, “veya”, “ise”, “ancak ve ancak” veya bunların eşanlamlıları ile birleştirebiliriz. Dolayısıyla, nicelemeli önermeler de, önerme eklemleri kullanılarak, nicelemeli ya da nicelemesiz önermeler ile birleştirilebilir. Örneğin, “Özgür irade olanaklı ise her insan davranışlarından sorumlu tutulabilir” önermesi, “Özgür irade olanaklıdır” ve “Her insan davranışlarından sorumlu tutulabilir” önermelerinin koşul eklemi ile birleştirilmesi ile elde edilmiştir. “Bazı insanlar filozoftur ancak bazıları filozof değildir” önermesi ise, “Bazı insanlar filozoftur” ve “Bazı insanlar filozof değildir" önermelerinin "ve" ekleminin eşanlamlısı olan "ancak" ifadesi ile birleştirilmesi ile elde edilmiştir.

Niceleyicilerle karmaşık önermeler elde etmenin diğer bir yolu bileşik önermelerin nicelenmesidir. Örneğin, "Bazı insanlar zengindir ama mutlu değildir" önermesi bu yolla elde edilmiştir. Bu önerme "Bazı insanlar zengindir ve bazı insanlar mutlu değildir" biçiminde yorumlanamaz. "Değişken" kavramı ile ilgili ön bilgiler gerektirdiğinden, buna benzer gündelik dil önermelerinin niceleme mantığı bakımından yapısını yedinci ünitede ele alacağız.

SIRA SİZDE 1

"Bazı insanlar zengindir ama mutsuzdur" önermesi niçin "Bazı insanlar zengindir ve bazı insanlar mutsuzdur" biçiminde yorumlanamaz?

Nicelemeli Önermelerin Değillenmesi

Önermeler mantığından bildiğiniz gibi, bir ***A*** önermesi ile bu önermenin değili olan ~***A*** önermesi arasındaki ilişki şudur: ***A*** doğru ise ~***A*** yanlış, ***A*** yanlış ise ~***A*** doğrudur. "Değilleme kuralları" diyebileceğimiz bu kurallar her ***A*** önermesi için geçerlidir. Dolayısıyla ***A*** nicelemeli bir önerme olduğunda bu kuralların sağlanması gerekir. Şimdi nicelemeli önermelerin değillenmesi konusunu buna göre değerlendirelim.

İlk olarak, tümel-nicelemeli önermelerin değillenmesini ele alalım: "Her *F G* dir" önermesinin değili "Bazı *F G* değildir" önermesidir. "Her *F G* dir" önermesi doğru ise *F* olup *G* olmayan bir şey olamaz. Dolayısıyla, "Bazı *F G* değildir" önermesi yanlış olur. "Her *F G* dir" önermesi yanlış ise, *F* olan bazı şeyler *G* değildir ve "Bazı *F G* değildir" önermesi doğru olur.

"Her *F G* dir" önermesinin dilbilgisi bakımından değili olan "Her *F G* değildir" önermesi "Her *F G*-olmayandır" yani "Hiçbir *F G* değildir" anlamında yorumlanabileceğine dikkat edilmelidir. Oysa "Her *F G* dir" önermesinin değili "Hiçbir *F G* değildir" olamaz. Çünkü bu iki önerme de aynı anda yanlış olabilir. Örneğin, hem "Her insan filozoftur" önermesi hem de "Hiçbir insan filozof değildir" önermesi yanlıştır. Bu iki önermenin birbirinin değili kabul edilmesi değilleme kurallarına aykırıdır: ***A*** ve ~***A*** önermelerinin ikisi birden yanlış olamaz, biri yanlış ise diğeri doğru olmalıdır. Bu nedenlerle biz "Her *F G* dir" önermesinin değili olarak sadece "Bazı *F G* değildir" önermesini kullanacağız.

"Her *F G* dir" önermesinin değili olarak, sadece, "Bazı *F G* değildir" önermesini kullanacağız.

Şimdi de tikel-nicelemeli önermelerin değillenmesini ele alalım. "Bazı *F G* dir" önermesinin değili "Bazı *F G* değildir" önermesi değil, "Hiçbir *F G* değildir" önermesidir. Bunun nedenini kolayca görebiliriz: Çoğu durumda, hem "Bazı *F G* dir" önermesi hem de "Bazı *F G* değildir" önermesi birlikte doğrudur. Örneğin, hem "Bazı insanlar filozoftur" önermesi hem de "Bazı insanlar filozof değildir" önermeleri doğrudur. Buna göre, "Bazı *F G* dir" önermesinin değili "Bazı *F G* değildir" önermesi olamaz çünkü değilleme kuralları gereği ***A*** ve ~***A*** önermelerinin ikisi birlikte doğru olamaz.

"Bazı *F G* dir" önermesinin değili, "Hiçbir *F G* değildir" önermesidir.

Nicelemeli Çıkarımlar ve Önermeler Mantığı

En az bir nicelemeli önerme içeren çıkarımlara "nicelemeli çıkarım" diyelim. Sembolik önermeler mantığının dili, sadece önerme eklemleri ve önerme değişkenleri üzerine kurulu olduğu için, oldukça sınırlıdır. Bu nedenle, sezgisel olarak geçerli bazı nicelemeli akıl yürütmelerin doğru biçimde değerlendirilmesinde sembolik önermeler mantığı yetersiz kalır. Klasik bir örnek olarak:

(1) Her insan ölümlüdür
Sokrates bir insandır
∴ Sokrates ölümlüdür

çıkarımını ele alalım. Bu çıkarım ve bu biçimdeki tüm çıkarımlar, sezgisel olarak açıkça geçerli oldukları halde, önermeler mantığının dilinde ancak

(2) $p, q \therefore r$

şeklinde sembolleştirilebilir. Oysa (2) önermeler mantığında geçersiz bir sembolik çıkarımdır. Demek ki, (1) gündelik dil çıkarımı önermeler mantığında değerlendirildiğinde geçersizdir.

(1) çıkarımının geçerli olması, içinde geçen "her" ifadesinin anlamına ve içinde geçen önermelerdeki "*F* bir *G* dir" biçimine bağlıdır. Hakikaten, *A* bir varlığın adı, *F* ve *G* herhangi iki yüklem olmak üzere

(3) Her *F G* dir
A bir *F* dir
∴ A G dir

biçimindeki tüm çıkarımlar, sezgisel olarak geçerli çıkarımlardır.

Bir diğer örnek:

(4) Sokrates filozoftur
Sokrates insandır
∴ Bazı insanlar filozoftur

Bu çıkarım da geçerli olduğu halde, sembolik önermeler mantığında ancak

(5) $p, q \therefore r$

şeklinde sembolleştirilebilir. Az önce de belirttiğimiz gibi, bu sembolik çıkarım da önermeler mantığında geçersizdir. Dolayısıyla, (4) çıkarımı önermeler mantığı bakımından geçersizdir. Bu çıkarımın geçerli olması, içinde geçen "bazı" ifadesine ve yine, içinde geçen önermelerdeki "*F* bir *G* dir" biçimine dayanmaktadır. Hakikaten,

(6) *A* bir *F* dir
A bir *G* dir
∴ Bazı *F G* dir

biçimindeki tüm çıkarımlar, sezgisel olarak geçerli çıkarımlardır.

Önermeler mantığı ile sezgisel olarak apaçık geçerli kimi çıkarımların biçimsel geçerliliğini ortaya koyamayız. "Tüm", "bazı" ifadelerini ve özne yüklem yapısını ortaya koyan bir mantık sistemi olan niceleme mantığı bu nedenle önemlidir.

(1) ve (4) çıkarımları gibi, sezgisel olarak geçerli ancak geçerlilikleri önermeler mantığında belgelenemeyen çıkarımların varlığı, önermeler mantığından daha güçlü bir mantık sistemine ihtiyacımız olduğunu ortaya koymaktadır. (1) ve (4) çıkarımlarının sezgisel olarak geçerli olmalarının, bu çıkarımları oluşturan önermelerin özne-yüklem yapısına ve içerdikleri "her" ve "bazı" ifadelerinin anlamına dayandığını görebiliyoruz. Buna göre, ihtiyaç duyduğumuz mantık sistemi önermelerin özne-yüklem yapısını ve niceleme özelliklerini ortaya koymalıdır. Niceleme mantığı, önermelerin özne-yüklem yapısını ve "her", "bütün", "bazı", "kimi" gibi ifadeleri ele alan mantık sistemidir.

NİCELEME MANTIĞININ SEMBOLİK DİLİ

Birinci ünitede belirttiğimiz gibi, bir sembolik dilin belirlenmesi için, öncelikle bu dilde kullanacağımız sembolleri belirtmeli, ardından da, bu sembolleri düzgün ifadeleri oluşturmak için hangi şekillerde bir araya getirebileceğimizi tanımlamalıyız. Şimdi, bu söylediklerimize uygun olarak, niceleme mantığının sembolik dilini oluşturalım:

Niceleme mantığının sembolik dili aşağıdaki sembolleri içerir:

(a) Önerme eklemleri: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
(b) Birey değişkenleri: $x, y, z, \ldots$
(c) Ad sembolleri: $A, B, C, \ldots$
(d) Yüklem sembolleri: $F, G, H, \ldots$
(e) Tümel-niceleyici: $\forall$ ("her" olarak okunur)
Tikel-niceleyici: $\exists$ ("bazı" olarak okunur)
(f) Parantezler: (,).

Niceleme mantığının düzgün deyimleri iki gruba ayrılır: terimler ve formüller.

Tanım : Niceleme mantığının terimleri şu şekilde tanımlanabilir:

(a) Her bir birey değişkeni bir terimdir.
(b) Her bir ad sembolü bir terimdir.
(c) Başka hiçbir sembol dizisi bir terim değildir.

Tanım : Niceleme mantığının formülleri şu şekilde tanımlanabilir:

(a) $\boldsymbol{t}$ bir terim ve $\boldsymbol{Y}$ bir yüklem sembolü ise $\boldsymbol{Yt}$ bir formüldür,
(b) $\boldsymbol{A}$ bir formül ise $\boldsymbol{\sim A}$ bir formüldür,
(c) $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ birer formül ise, $(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B})$ ve $(\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B})$ birer formüldür.
(d) ν bir değişken $\boldsymbol{A}$ bir formül ise, $\forall\ \nu \boldsymbol{A}$ ve $\exists\ \nu \boldsymbol{A}$ birer formüldür,
(e) Başka hiçbir sembol dizisi bir formül değildir.

Sadece bir yüklem ve onu izleyen bir formülden oluşan $\boldsymbol{Yt}$ biçimindeki formüller "basit formül", "atomik formül" ya da "atom", bunun dışındaki formüller "bileşik formül" olarak adlandırılır. "$\forall$" ve "$\exists$" sembollerine niceleyici, bir niceleyici ve bir v değişkeninden oluşan "$\forall\ \nu$" ve "$\exists\ \nu$" ifadelerine ise "niceleme" diyeceğiz.

ÖRNEK

(a) x, A birer terimdir.
(b) Fx, Gy, HA birer basit (atomik) formüldür.
(c) $\sim Fx$, $(HA \rightarrow \sim Gz)$ birer bileşik formüldür.
(d) $\forall x\, Fx$, $\exists y\, (Gy \vee Hz)$ birer bileşik formüldür.
(e) Birden çok defa niceleyerek de bir formül elde edebiliriz. Örneğin, $\forall x \exists y\, (Fx \vee Gy)$ bir bileşik formüldür.

Ad sembollerinin işlevi, belirli varlıklara işaret etmektir. Yüklem sembolleri ise, varlıkların özelliklerini belirtir. Gündelik dildeki "siyahtır", "öğrencidir" gibi yüklemlerin terimlerle birleşerek, "Ahmet öğrencidir", "Kömür siyahtır" gibi önermeleri oluşturması gibi, yüklem sembolleri de sembolik terimlerle birleşerek formülleri oluştururlar.

Birey değişkenleri gündelik dildeki "bu", "şu" gibi zamirlerin sembolik dildeki karşılığıdır. Aynen "bu" zamirinin hangi varlığa işaret ettiğinin kullanıldığı duruma göre değişmesi gibi, birey değişkenleri de, belirli bir varlığa işaret etmezler ancak bir birey değişkeni yerine belli bir varlığa işaret eden bir sembol konabilir. Bu anlamda birey değişkenlerini birer "yer tutucu" olarak kabul edebiliriz. Belirli bir varlık hakkında konuşmak istediğimizde, bu değişkenler yerlerini hakkında konuşmak istediğimiz varlığa ait ad sembolüne bırakırlar.

Birey değişkenleri belirli varlıklara işaret etmezler, ancak gündelik dildeki "bu", "şu" zamirleri gibi işlev görürler.

(7) Bu siyahtır.

Tümcesi tek başına doğru ya da yanlış bir yargı bildirmez. Bildirebilmesi için, "bu" sözcüğünün hangi varlığa işaret ettiğini bilmemiz gerekir. "*F*" yüklem değişkeninin "siyahtır" yüklemini belirttiğini kabul edelim. Bu durumda

(8) *Fx*

Formülü, *x* birey değişkeninin hangi varlığa işaret ettiği bilinmediğinden, doğru ya da yanlış bir yargı bildirmez. (8) formülünü bir önermeye dönüştürmenin iki yolu vardır. Birincisi, *x* değişkeninin yerine belirli varlığa işaret eden bir sembol, yani bir ad sembolü koymaktır. Örneğin, *x* değişkeninin yerine *A* ad sembolünü koyarak elde ettiğimiz *FA* formülü, *A* ad sembolünün Düldül'ü işaret ettiğini kabul edersek yanlış bir önerme olur (Bildiğiniz gibi, çizgi kahraman Red Kit'in atı olan Düldül beyazdır). İkinci yol ise, (8) formülünün başına $\forall x$ ya da $\exists x$ nicelemelerinden birini koymaktır. Bu şekilde elde ettiğimiz $\forall x\, Fx$ formülü "Her şey siyahtır" anlamına gelir ve yanlıştır. $\exists x\, Fx$ formülü ise "Bazı şeyler siyahtır" anlamına gelir ve doğrudur.

Bu söylediklerimizi, niceleme mantığının sembolik dilinin sentaktik özellikleri bakımından genel olarak açıklayabilmek için, niceleme mantığı için çözümleyici çizelge kurallarını tanımlarken de ihtiyaç duyacağımız, “bir nicelemenin etki alanı” kavramını ve buna bağlı olarak, “bağlı ve serbest değişken” kavramlarını tanımlayacağız.

Tanım: Bir nicelemenin bir formüldeki etki alanı, o nicelemeyi izleyen formüldür.

ÖRNEK

$\exists y\ (Gy \vee Hz)$ önermesinde $\exists y$ nicelemesinin etki alanı $(Gy \vee Hz)$ formülüdür. $\exists y$ nicelemesinin $(\exists y\ Gy \vee Hz)$ formülündeki etki alanı ise Gy formülüdür.

ÖRNEK

$\exists y\ (Gx \vee \forall z\ Hz)$ formülünde $\exists y$ tikel-nicelemesinin etki alanı $(Gx \vee \forall z\ Hz)$ formülüdür. Bu formülde $\forall z$ tümel-nicelemesinin etki alanı ise Hz formülüdür.

ÖRNEK

$(\exists y\ (Gy \vee \forall z\ Hz) \leftrightarrow \exists x\ Gx)$ formülünde $\exists y$ tikel-nicelemesinin etki alanı $(Gy \vee \forall z\ Hz)$ formülü, $\forall z$ tümel-nicelemesinin etki alanı Hz formülü, $\exists x$ tikel-nicelemesinin etki alanı ise Gx formülüdür.

Tanım: Bir v değişkenin bir formüldeki bir geçişi, bir $\forall v$ veya $\exists v$ nicelemesinin etki alanında ise bu değişkenin bir “bağlı” geçişidir. Eğer, v değişkeninin bu geçişi ne $\forall v$ ne de $\exists v$ nicelemesinin etki alanında ise bu değişkenin bir “serbest” geçişidir. Niceleyiciye bitişik olan birey değişkenleri de bağlı kabul edilir. Yani, $\forall v$ ve $\exists v$ nicelemelerinde, niceleyiciye bitişik olan v değişken geçişleri bağlıdır.

ÖRNEK

$\exists y\ (G\underline{x} \vee \forall x\ Hx)$ formülünde x değişkeninin altı çizili olan ilk geçişi hiçbir $\forall x$ veya $\exists x$ nicelemesinin etki alanında olmadığından, $\exists y$ nicelemesinin etki alanında olmasına rağmen, serbesttir. x değişkeninin diğer tüm geçişleri ise $\forall x$ nicelemesinin etki alanında olduğundan bağlıdır.

Tüm değişken geçişleri bir aynı değişkenle yapılan bir nicelemenin etki alanında olan formüller niceleme mantığının önermeleridir.

Tanım: Bir formülde tüm değişken geçişleri bağlı ise, bu formül sembolik niceleme mantığında bir “kapalı formül” veya “önerme”dir. En az bir serbest değişken geçişi olan bir formül ise “açık formül” olarak adlandırılır.

ÖRNEK

$\exists y\ (G\underline{x} \vee \forall x\ Hx)$ formülünde x değişkeninin altı çizili olan geçişi serbest olduğundan, $\exists y\ (Gx \vee \forall x\ Hx)$ bir açık formüldür.

Bir v değişkeninin serbest geçişlerini içeren bir açık formülü kapalı bir formüle dönüştürmenin iki yolu vardır:

(a) Formülü $\exists v$ ya da $\forall v$ ile nicelemek

(b) v değişkeninin serbest geçişleri yerine bir ad sembolü koymak

ÖRNEK

$\exists y\ (G\underline{x} \vee \forall z\ Hz)$ açık formülünde, x değişkeninin altı çizili olan serbest geçişi yerine A ad sembolünü koymakla $\exists y\ (GA \vee \forall z\ Hz)$ önermesi elde edilir. Formülü $\exists x$ ile nicelersek, $\exists x \exists y\ (Gx \vee \forall z\ Hz)$ önermesi, $\forall x$ ile nicelersek, $\forall x \exists y\ (Gx \vee \forall z Hz)$ önermesi elde edilir.

ÖRNEK

$Fz \wedge \exists y\ (\forall x\ Gx \vee Hy)$ formülünden, z değişkeninin serbest geçişi yerine B ad sembolünü koymakla $FB \wedge \exists y\ (\forall x\ Gx \vee Hy))$ önermesi elde edilir. Formülü $\exists z$ ile nicelersek $\exists z\ (Fz \wedge \exists y\ (\forall x\ Gx \vee Hy))$önermesini, $\forall z$ ile nicelersek $\forall z\ (Fz \wedge \exists y\ (\forall x\ Gx \vee Hy))$ önermesini elde ederiz.

Bir formülde bir değişkenin hem serbest hem de bağlı geçişlerinin olması karışıklığa yol açabilir. Göreceğimiz gibi, bu durumdan kaçınabiliriz. Niceleme mantığında, aynı değişkenin hem serbest hem de bağlı geçişlerini içeren bir formülü, bu değişkenin sadece serbest geçişleri olan eşdeğer bir formül ile ifade edebiliriz. Bu nedenle, bundan sonra gerekmedikçe formüllerde bir değişkenin hem serbest hem de bağlı geçişlerinin olmamasına dikkat edeceğiz.

Nicelemeli Önermelerin Geçerliliği ve Eşdeğerliği

İkinci ünitede, bir önermenin totoloji olmasının bu önermenin tüm doğruluk değerlemelerinde doğru değerini alması olduğunu, iki önermenin eşdeğer olmasının da, bu iki önermenin tüm doğruluk değerlemelerinde aynı doğruluk değerini almaları olduğunu söylemiştik. Niceleme mantığında, benzer biçimde, bir önermenin geçerli olması bu önermenin tüm yorumlamalarda dorğu değerini alması, iki önermenin eşdeğer olması da , bu önermelerin tüm yorumlamalarda aynı doğruluk değerini almaları biçiminde tanımlanır.

Niceleme mantığında, formüllerin yorumlanması, önermeler mantığında olduğundan biraz daha karmaşıktır. Bu konuyu yedinci ünitede ele alacağız. Orada hem niceleme mantığının geçerli önermeleri konusu hem de, nicelemeli önermelerin eşdeğerliği konusu ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Ancak, şimdiden kimi nicelemeli önermelerin niceleme mantığının geçerli önermeleri olduğunu, kimi önerme çiftlerinin de eşdeğer olduğunu söyleyebiliriz.

İlk olarak, totolojilerin birer örneği durumundaki nicelemeli önermeler, yani totolojilerde geçen değişkenler yerine niceleme mantığının diline ait önermelerin konmasıyla elde edilmiş olan önermeler, niceleme mantığında geçerli önermelerdir. Ayrıca, önermeler mantığı bakımından birbirini içeren önermelerin birer örneği durumundaki önermeler, niceleme mantığı bakımından da birbirini içerir. Dolayısıyla, önermeler mantığı bakımından eşdeğer önerme biçimlerinin birer örneği durumundaki nicelemeli önermeler, niceleme mantığı bakımından da eşdeğer önermelerdir.

Totolojilerden önerme değişkenleri yerine niceleme mantığının önermelerinin konmasıyla elde edilen niceleme mantığı önermeleri niceleme mantığında geçerli önermelerdir. Aynı durum içerme ve eşdeğerlik için de geçerlidir.

ÖRNEK

Aşağıdaki önermeler, birer totoloji örneği olmalarından dolayı niceleme mantığının geçerli önermeleridir:

(a) $FA \leftrightarrow FA$ önermesi, önermeler mantığında tüm örnekleri totoloji olan $A \leftrightarrow A$ biçiminde bir önerme olduğundan, niceleme mantığında geçerlidir.

(b) $\sim(\sim\forall y \ \sim Fy \vee \exists x \sim Gy) \rightarrow \forall y \ \sim Fy$ önermesi oldukça karmaşık bir önerme gibi görünmesine rağmen, doğruluk tablosonu yaparak görebileceğiniz gibi, tüm örnekleri bir totoloji olan $\sim(\sim A \vee B) \rightarrow A$ biçiminde bir önerme olduğundan, niceleme mantığında geçerli bir önermedir.

ÖRNEK

Aşağıdaki önerme çiftleri, önermeler mantığı bakımından eşdeğer önerme biçimlerinin birer örneği durumundaki nicelemeli önermeler olduğundan niceleme mantığı bakımından da eşdeğer önermelerdir:

(a) Önermeler mantığında $A \wedge (B \vee C)$ biçimindeki bir önerme A, B ve C yerine aynı önermeler konmak şartıyla, $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ önermesine eşdeğer olduğundan, $FA \wedge (\sim\forall y \ \sim Fy \vee HA)$ önermesi, $(FA \wedge \sim\forall y \ \sim Fy) \vee (FA \wedge HA)$ önermesi ile eşdeğerdir.

(b) Önermeler mantığında A önermesi $(\sim A \rightarrow B)$ önermesini içerir. Dolayısıyla, $\forall y \sim Fy$ önermesinin niceleme mantığı bakımından, $(\sim\forall y \sim Fy \rightarrow \exists y \ (Gx \vee \forall x \ Hx))$ önermesini içerdiğini başka hiçbir bilgiye gerek duymaksızın söyleyebiliriz.

Ayrıca, niceleyicilerin anlamından yola çıkarak, nicelemeli önermelerin semantik özellikleri hakkında karar verebiliriz. Örneğin, $\forall x\, Fx$ önermesinin “Herşey F dir” anlamına geldiğini söylemiştik. $\forall y\, Fy$ veya $\forall z\, Fz$ önermeleri de tam olarak aynı yargıyı dile getirir. Aynı şekilde, $\exists y\, Fy$ veya $\exists z\, Fz$ önermeleri de $\exists x\, Fx$ önermesi gibi, “Bazı şeyler F dir” anlamına gelir. Bu durum niceleme mantığında genel bir kuralla ifade edilir: Bir önermede $\forall v$ veya $\exists v$ nicelemesine bağlı tüm değişkenlerin yerine önermede geçmeyen bir w değişkeni konur ve söz konusu $\forall v$ veya $\exists v$ nicelemesinin yerine $\forall w$ veya $\exists w$ konursa, elde edilen önerme ilk önerme ile eşdeğerdir.

ÖRNEK

$\exists y\, (Gy \vee \forall x\, Hx)$ *önermesi,* $\exists z\, (Gz \vee \forall x\, Hx)$ *önermesine ve* $\exists y\, (Gy \vee \forall z\, Hz)$ *önermesine eşdeğerdir. İlkinde, y bağlı değişkeni z ile değiştirilmiş, ikincisinde ise, x bağlı değişkeni z ile değiştirilmiştir.*

ÖRNEK

$\forall y\, \exists x\, (Gx \wedge (Fy \vee Gx))$ *önermesinden, y bağlı değişkenini w değişkeni ile değiştirerek* $\forall w\, \exists x\, (Gx \wedge (Fw \vee Gx))$ *önermesi elde edilir.*

SIRA SİZDE 2

Bu kısımdaki bilgilerinizden yola çıkarak, aşağıdaki nicelemeli önermelerin her birinin neden geçerli olduğunu açıklayınız.

(a) $\forall w\, \exists y\, (Gy \wedge ((Fw \vee Gy)) \leftrightarrow \forall x\, \exists w\, (Gw \wedge (Fx \vee Gw))$

(b) $\forall w\, \exists x\, (Gx \wedge ((Fw \vee Gx)) \leftrightarrow \forall x\, \exists w\, \sim(\sim Gw \vee \sim(Fx \vee Gw))$

Ön-nicelemeli Normal Form

Niceleme mantığında her formül, başta bir dizi niceleyici ve ardından niceleyici geçmeyen bir “matris” ile oluşmuş bir formüle eşdeğerdir. Bu biçime formülün “ön-nicelemeli normal biçimi” adı verilir. Ön-nicelemeli biçimde bir önermenin genel biçimi, her bir Q_i tümel veya tikel-niceleyici, her bir v_i bir değişken ve P içinde hiçbir niceleyici geçmeyen bir formül olmak üzere aşağıdaki gibi olacaktır:

$$Q_1v_1Q_2v_2...Q_nv_n\, P$$

Tüm niceleyicileri başta olan ve ardından nicelemesiz bir formül gelen formüller ön-nicelemeli normal biçimde formüllerdir.

İçinde hiçbir niceleyici geçmeyen bir formül, tanım gereği ön-nicelemeli normal biçimdedir. Çünkü, bir formülde hiçbir niceleyici geçmiyor ise, bu formülde başa geçirilmesi gereken niceleyici yok demektir. Bir başka deyişle, içinde hiçbir niceleyici geçmeyen bir formülün ön-nicelemeli normal biçimi kendisine eşittir.

ÖRNEK

Aşağıdaki formüllerin herbiri ön-nicelemeli normal biçimdedir:

a. Fx
b. FA
c. $\forall y\, \exists x\, (Gx \wedge ((Fy \wedge Gy) \wedge (\sim Fy \wedge \sim Gy)))$
d. $(Gx \wedge ((Fy \wedge Gy) \wedge (\sim Fy \wedge \sim Gy)))$
e. $\forall x\, \exists y\, \exists w\, ((Fw \wedge Gy) \wedge (\sim Fx \wedge Gx))$

Ön-nicelemeli normal formda verilen bir önermenin mantık bakımından denetlenmesi bu biçimde olmayan önermelere göre daha kolay olduğundan, önermelerin ön-nicelemeli normal biçime dönüştürülmesi uygulamada yarar sağlar. Şimdi bir önermenin ön-nicelemeli normal biçimini nasıl elde edebileceğimizi göreceğiz:

Tanım: Niceleme mantığında, bir P formülünün ön nicelemeli normal biçimi aşağıdaki aşamalar takip edilerek oluşturulur:

(a) İkinci ünitede gördüğümüz eşdeğerlikler yardımıyla koşul ve karşılıklı koşul eklemleri elenerek, önerme - niceleyiciler dışında - sadece değilleme, tümel-evetleme ve tikel-evetleme eklemlerini içeren bir biçime dönüştürülür. Size kolaylık sağlamak amacıyla, bu aşamada yararlı olacak eşdeğerlikleri tekrarlayalım:

i. $(P \rightarrow Q) \equiv (\sim P \vee Q)$
ii. $(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \wedge Q) \vee (\sim P \vee \sim Q))$
iii. $(P \leftrightarrow Q) \equiv ((\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q))$

(b) Ardından, aşağıdaki eşdeğerliklerden uygun olanları kullanarak, önermede tüm değilleme eklemleri sadece atomik formüllere uygulanacak hale getirilir. Bu aşamada aşağıdaki eşdeğerlikler kullanılacaktır:

i. $\sim\sim P \equiv P$
ii. $\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$
iii. $\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$
iv. $\sim\forall x\, Px \equiv \exists x \sim Px$
v. $\sim\exists x\, Px \equiv \forall x \sim Px$

(c) Gerekli bağlı değişkenler, formülde hiç geçmeyen değişkenlerle değiştirilir. Bu aşamada amaç, bir değişkenin hem bağlı hem de serbest geçmesini, ve aynı değişkenin birden çok nicelemede geçmesini engellemektir. Bunu yapmazsak, sonuçta elde edeceğimiz formül, başlangıçta bize verilen formüle eşdeğer olmaz.

(d) Tüm niceleyiciler önermedeki geçiş sıralarına göre başa geçirilir. Bu işlemin sonunda eşdeğer bir formül elde edeceğimize dayanak oluşturan eşdeğerlikler aşağıda verilmiştir.

i. $\forall x\, Px \wedge Q \equiv \forall x\, (Px \wedge Q)$
ii. $Q \wedge \forall x\, Px \equiv \forall x\, (Q \wedge Px)$
iii. $\exists x\, Px \wedge Q \equiv \exists x\, (Px \wedge Q)$
iv. $Q \wedge \exists x\, Px \equiv \exists x\, (Q \wedge Px)$
v. $\forall x\, Px \vee Q \equiv \forall x\, (Px \vee Q)$
vi. $Q \vee \forall x\, Px \equiv \forall x\, (Q \vee Px)$
vii. $\exists x\, Px \vee Q \equiv \exists x\, (Px \vee Q)$
viii. $Q \vee \exists x\, \mathrm{Px} \equiv \exists x\, (Q \vee Px)$
ix. $\forall x\, Px \wedge \forall x\, Qx \equiv \forall x\, (Px \wedge Qx)$
x. $\exists x\, Px \vee \exists x\, Qx \equiv \exists x\, (Px \vee Qx)$
xi. $\mathrm{Q}_1\, x\, P \wedge \mathrm{Q}_2 y\, R \equiv \mathrm{Q}_1\, x\, \mathrm{Q}_2 y\, (P \wedge R)$
xii. $\mathrm{Q}_1\, x\, \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}_2 y\, R \equiv \mathrm{Q}_1\, x\, \mathrm{Q}_2 y\, (P \vee R)$

Ön-nicelemeli normal biçime çevirme örneklerine geçmeden önce, (d) aşamasındaki eşdeğerliklerden nasıl yararlanabileceğimizi bir kaçına örnek vererek görelim.

ÖRNEK

a. $\forall x\, Fx \wedge \exists y\, Gy \equiv \forall x\, (Fx \wedge \exists y\, Gy)$ *(i eşdeğerliğini kullanarak)*
b. $\forall x\, Fx \wedge \forall x\, (Gx \leftrightarrow \exists y\, Gy) \equiv \forall x (Fx \wedge (Gx \leftrightarrow \exists y\, Gy))$ *(ix eşdeğerliğini kullanarak)*
c. $\exists x\, Gx \vee \exists x\, Fx \equiv \exists x\, (Gx \vee Fx)$ *(x eşdeğerliğini kullanarak)*
d. $\forall x\, Fx \wedge \exists y\, Gy \equiv \forall x\, \exists y\, (Fx \wedge Gy)$ *(xi eşdeğerliğini kullanarak)*

ÖRNEK

$(\forall x\, Fx \leftrightarrow \exists x\, Fx)$ *önermesini ön-nicelemeli normal biçime dönüştürelim:*

(a) Karşılıklı koşul ekleminin elenmesi sonucunda aşağıdaki önerme elde edilir:

$$((\forall x\, Fx \wedge \exists x\, Fx) \vee (\sim\forall x\, Fx \wedge \sim\exists x\, Fx))$$

(b) Değillemeleri sadece atomik formülere etki edecek şekile dönüştürerek aşağıdaki önerme elde edilir:

$$((\forall x\, Fx \wedge \exists x\, Fx) \vee (\exists x \sim Fx \wedge \forall x \sim Fx))$$

(c) Gerekli değişken değiştirmeleri yapılarak aşağıdaki önerme elde edilir

$$((\forall x\, Fx \wedge \exists y\, Fy)\ \vee (\exists z \sim Fz \wedge \forall w \sim Fw))$$

(d) Niceleyiciler başa alınarak aşağıdaki ön-nicelemeli normal biçimdeki önerme elde edilir:

$$\forall x\, \exists y\, \exists z\, \forall w\, ((Fx \wedge Fy)\ \vee (\sim Fz \wedge \sim Fw))$$

ÖRNEK

$(\exists x\, Gx \wedge \forall x\, (Fx \leftrightarrow Gx))$ önermesini ön-nicelemeli normal biçime dönüştürelim:

(a) Karşılıklı koşul ekleminin elenmesi sonucunda aşağıdaki önerme elde edilir:

$$(\exists x\, Gx \wedge \forall x\, ((Fx \wedge Gx) \vee (\sim Fx \wedge \sim Gx)))$$

(b) Önermedeki değilleme sembolleri sadece atomik önermelere etki ettiğinden, bu aşamada elde edilecek önerme yine $(\exists x\, Gx \wedge \forall x\, ((Fx \wedge Gx) \vee (\sim Fx \wedge \sim Gx)))$ önermesidir.

(c) Gerekli değişken değiştirmeleri yapılarak aşağıdaki önerme elde edilir:

$$(\exists x\, Gx \wedge \forall y\, ((Fy \wedge Gy) \vee (\sim Fy \wedge \sim Gy)))$$

(d) Niceleyiciler başa alınarak aşağıdaki ön-nicelemeli normal biçimdeki önerme elde edilir:

$$\exists x\, \forall y\, (Gx \wedge ((Fy \wedge Gy) \vee (\sim Fy \wedge \sim Gy)))$$

ÖRNEK

$\exists x((Gx \wedge FA) \leftrightarrow \forall y\, Gy)$ formülünü ön-nicelemeli normal biçime dönüştürelim:

(a) Karşılıklı koşul ekleminin elenmesi sonucunda aşağıdaki önerme elde edilir:

$$\exists x(((Gx \wedge FA) \wedge \forall y\, Gy) \vee ((\sim(Gx \wedge FA) \wedge \sim\forall y\, Gy)))$$

(b) Değillemeleri sadece atomik formülere etki edecek şekle dönüştürerek aşağıdaki önerme elde edilir:

$$\exists x(((Gx \wedge FA) \wedge \forall y\, Gy) \vee ((\sim Gx \vee \sim FA) \wedge \exists y \sim Gy)))$$

(c) Bağlı değişken değiştirme yoluyla, formülde geçmeyen değişkenler kullanarak aşağıdaki önerme elde edilir:

$$\exists x(((Gx \wedge FA) \wedge \forall z\, Gz) \vee ((\sim Gx \vee \sim FA) \wedge \exists w \sim Gw)))$$

(d) Niceleyiciler başa alınarak aşağıddaki ön-nicelemeli normal biçimdeki önerme elde edilir:

$$\exists x\, \forall z\, \exists w\, (((Gx \wedge FA) \wedge Gz) \vee ((\sim Gx \vee \sim FA) \wedge \sim Gw)))$$

SIRA SİZDE 3

$\exists x(Hy \leftrightarrow \forall y\, (Gx \wedge Fy))$ önermesini her adımda elde edilen önermeyi açıkça belirterek ön-nicelemeli normal biçime dönüştürünüz.

Özet

AMAÇ 1

Niceleyici kavramını ve gündelik dildeki nicelemeli önermeleri açıklayabilmek,

Niceleme mantığında iki niceleyici temel olarak kabul edilir: "Her" kelimesiyle ifade edilen *tümel-niceleyici* ve "bazı" kelimesiyle ifade edilen *tikel-niceleyici.* Bu niceleyiciler farklı biçimlerde de ifade edilebilir. Gündelik dilde en basit nicelemeli önermeler "Her şey *F* dir", "Her *F G* dir", "Bazı şeyler *F* dir", "Bazı *F G* dir" biçimindeki önermelerdir. Daha karmaşık nicelemeli önermeler elde etmek için, bir önermede niceleyici ifadeleri birlikte kullanabilir ya da, bir niceleyici ifadeyi birden çok kez uygulayabiliriz. Ayrıca nicelemeli önermeleri önerme eklemleri ile birleştirebilir veya önerme eklemleri içeren bileşik önermelere niceleyici ifadeleri uygulayabiliriz.

"Her *F G* dir" önermesinin değili "Bazı *F G* değildir" önermesidir. "Bazı *F G* dir" önermesinin değili ise, "Hiçbir *F G* değildir" önermesidir. Nicelemeli önermelerin değillenmesinde değilleme kurallarına uyulmalıdır: Bir önerme doğru ise değili yanlış, bir önerme yanlış ise değili doğru olmalıdır.

Önerme eklemleri mantığı niceleyici ifadeler içeren çoğu gündelik dil çıkarımını doğru biçimde değerlendirmekte yetersiz kaldığından, bu çıkarımları değerlendirmek için niceleme mantığı geliştirilmiştir.

AMAÇ 2

Niceleme mantığının sembolik dilinin temel kavramlarını açıklayabilmek.

Niceleme mantığının dili önerme eklemlerini, birey değişkenlerini, ad sembollerini, yüklem sembollerini, tümel ve tikel-niceleyicileri içerir. Parantezler ise anlamı belirli kılmak için kullanılır. Niceleme mantığının anlamlı deyimleri iki gruba ayrılır: *terimler* ve *formüller.* Her bir değişken ve ad sembolü bir terimdir. Niceleme mantığının formülleri ise şu şekilde tanımlanabilir:

(a) $\boldsymbol{t}$ bir terim ve $\boldsymbol{Y}$ bir yüklem sembolü ise $\boldsymbol{Yt}$ bir formüldür,

(b) $\boldsymbol{A}$ bir formül ise $\sim\boldsymbol{A}$ bir formüldür,

(c) $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ birer formül ise, $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ ve $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ birer formüldür.

(d) v bir değişken $\boldsymbol{A}$ bir formül ise, $\forall v\,\mathbf{A}$ ve $\exists v\boldsymbol{A}$ birer formüldür,

(e) Başka hiçbir sembol dizisi bir formül değildir.

Sadece bir yüklem ve onu izleyen bir formülden oluşan $\boldsymbol{Yt}$ biçimindeki formüller "basit formül", "atomik formül" ya da "atom", bunun dışındaki formüller "bileşik formül" olarak adlandırılır.

Bir formülde tüm değişken geçişleri bağlı ise, bu formül sembolik niceleme mantığında bir önermedir. En az bir serbest değişken geçişi olan bir formül ise "açık formül" olarak adlandırılır. Bir v değişkenin bir formüldeki bir geçişi, bir $\forall v$ veya $\exists v$ nicelemesinin etki alanında ise bu değişkenin bir "bağlı" geçişidir. Eğer, v değişkeninin bu geçişi ne $\forall v$ ne de $\exists v$ nicelemesinin etki alanında ise bu değişkenin bir "serbest" geçişidir. Bir formülde tüm değişken geçişleri bağlı ise, bu formül sembolik niceleme mantığında bir önermedir. En az bir serbest değişken geçişi olan bir formül ise "açık formül" olarak adlandırılır.

Nicelemeli önermelerin geçerliliğini, eşdeğerliğini ve birbirlerini içerip içermediklerini denetlemek, önermeleri niceleme mantığında yorumlamanın önermeler mantığına göre daha karmaşıktır. Ancak, önermeler mantığı bilgimizi ve niceleyicilerin temel anlamını değerlendirerek birtakım sonuçlara varabiliriz: Bir totoloji örneği durumundaki bir nicelemeli önerme geçerlidir. Ayrıca, bir önermeden bağlı değişken değiştirmekle eşdeğer bir önerme elde edilir.

Her nicelemeli önerme, tüm niceleyicileri başta olan ve bunu izleyen niceleyicisiz bir formülden oluşan bir önermeye dönüştürülebilir. Elde edilen bu önermeye, önermenin "ön-nicelemeli normal biçimi" adı verilir. Nicelemeli önermeleri ön-nicelemeli normal biçime çevirebilmek özellikle niceleme mantığının uygulaması bakımından önemlidir. Niceleme mantığında, bir önermenin ön-nicelemeli normal biçimi aşağıdaki aşamalar takip edilerek oluşturulur:

(a) İkinci ünitede gördüğümüz eşdeğerlikler yardımıyla koşul ve karşılıklı koşul eklemleri elenerek, önerme -niceleyiciler dışında- sadece değilleme, tümel-evetleme ve tikel-evetleme eklemlerini içeren bir biçime dönüştürülür.

(b) Ardından, uygun eşdeğerliklerden faydalanarak, önermede tüm değilleme eklemleri sadece atomik formüllere uygulanacak hale getirilir.

(c) Gerekli bağlı değişkenler, formülde hiç geçmeyen değişkenlerle değiştirilir. Bu aşamada amaç, bir değişkenin hem bağlı hem de serbest geçmesini, ve aynı değişkenin birden çok niceleyicide geçmesini engellemektir.

(d) Tüm niceleyiciler önermedeki geçiş sıralarına göre başa geçirilir.

Kendimizi Sınayalım

1. “Bazı arabalar sarı değildir” önermesinin değili aşağıdakilerden hangisidir?

a. Hiçbir araba sarı değildir.
b. Tüm arabalar sarıdır.
c. Bazı arabalar sarıdır.
d. Bazı sarı şeyler araba değildir.
e. En az bir araba sarı değildir.

2. “Hiçbir insan bitki değildir.” önermesinin değili aşağıdakilerden hangisidir?

a. Bazı insanlar bitki değildir.
b. Tüm insanlar bitkidir.
c. Bazı insanlar bitkidir.
d. Bazı bitkiler insan değildir.
e. Tüm bitkiler insandır.

3. Aşağıdaki önermelerden hangisi tümel-nicelemeli bir önermedir?

a. Bir gök cismi Dünyaya hızla yaklaşmaktadır.
b. Trafik kuralları yaya ve yolcuların güvenliği içindir.
c. Evrende Dünya dışında da yaşam vardır.
d. 2 çift asal sayıdır.
e. Bazı matematik önermeleri yanlıştır.

4. Aşağıdaki önermelerden hangisinde “bir” ifadesi tümel-niceleyici anlamında kullanılmıştır?

a. Her insanın bir hayali olmalıdır.
b. Bir gök cismi Dünyaya hızla yaklaşmaktaydı.
c. Dengeli beslenme hastalıklardan korunmanın etkili bir yoludur.
d. Bir gün 24 saattir.
e. Ahmet o zaman daha küçük bir çocuktu.

5. $\exists y\,(Gx \vee \forall z\,(Hy \leftrightarrow Gz))$ formülünde hangi değişkenlerin **en az** bir serbest geçişi vardır?

a. Sadece x
b. Sadece y
c. Sadece z
d. x ve y
e. x ve z

6. Aşağıdakilerden hangisi sembolik niceleme mantığında bir önermedir?

a. $\exists y\,(Gx \vee \forall z\,(Hy \leftrightarrow Gz))$
b. $\exists y\,(Gy \vee \forall z\,(Hy \leftrightarrow Gz))$
c. $\exists x\,(Gy \vee \forall z\,(Hy \leftrightarrow Gz))$
d. $\exists x\,(Gx \vee \forall z\,(Hy \leftrightarrow Gz))$
e. $\exists y\,(Gy \vee \forall x\,(Hy \leftrightarrow Gz))$

7. Aşağıdaki önerme çiftlerinden hangisi, bağlı değişken değiştirme ve önermeler mantığına göre eşdeğer formüllerin yerdeğiştirmesi ile elde edilmiş eşdeğer önermeler değildir?

a. $\forall z\,\exists y\,(Fz \vee (GA \rightarrow Hy))$, $\forall x\,\exists y\,(Fx \vee (GA \rightarrow Hy))$
b. $\forall z\,\exists y\,(Fz \vee (GA \rightarrow Hy))$, $\forall z\,\exists x\,(Fz \vee (GA \rightarrow Hx))$
c. $\forall z\,\exists y\,(Fz \vee (GA \rightarrow Hy))$, $\forall z\,\exists x\,(Fz \vee (\sim GA \vee Hx))$
d. $\forall z\,\exists y\,(Fz \vee (GA \rightarrow Hy))$, $\forall z\,\exists y\,(Fz \vee (Hy \rightarrow GA))$
e. $\forall z\,\exists y\,(Fz \vee (GA \rightarrow Hy))$, $\forall z\,\exists y\,(\sim Fz \rightarrow (GA \rightarrow Hy))$

8. Aşağıdaki nicelemeli önermelerden hangisi bir totoloji biçiminden elde edildiği için niceleme mantığında da geçerlidir?

a. $\exists x\,\forall z\,(\exists w\,(Gw \wedge Fy) \vee Gz)$
b. $\exists x\,\forall z\,(\exists w\,(Gw \wedge Fy) \vee \exists w\,(Fy \wedge Fy))$
c. $\exists x\,\forall z\,(\exists w\,(Gw \wedge Fw) \vee \exists w\,(Fy \wedge Fy))$
d. $\exists y\,\forall z\,(Gy \vee \forall x\,(Hx \leftrightarrow Gz))$
e. $\exists x\,Fx \rightarrow (\exists w\,(Gw \wedge Fy) \vee \exists x\,Fx)$

9. Aşağıdaki önermelerden hangisi ön-nicelemeli normal biçimdedir?

a. $\forall z\,(\exists w\,(Gw \wedge Fz) \vee Gz)$
b. $\exists x\,\exists w\,((Gx \wedge Fw) \vee \forall z\,Gz)$
c. $\exists x\,\exists w\,((Gx \wedge Fw) \vee Gw)$
d. $\exists w\,\forall z\,((Gw \wedge \exists w\,Fw) \vee Gz)$
e. $\exists w\,\forall w\,((Gz \wedge \exists w\,Fw) \vee Gz)$

10. $\exists x\,(Gx \rightarrow \forall x\,(Fx \vee Gx))$ önermesinin ön-nicelemeli normal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\exists y\,\forall x\,(\sim Gx \vee (Fy \vee Gy))$
b. $\forall x\,\exists y\,(\sim Gx \vee (Fy \vee Gy))$
c. $\forall x\,\forall y\,(\sim Gx \vee (Fy \vee Gy))$
d. $\exists x\,\forall y\,(\sim Gx \vee (Fy \vee Gy))$
e. $\forall y\,\forall x\,(\sim Gx \vee (Fy \vee Gy))$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. b. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Niceleyiciler ve Nicelenmiş Önermeler ” konusuna bakınız.
2. c. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Niceleyiciler ve Nicelenmiş Önermeler” konusuna bakınız.
3. b. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Niceleme Mantığının Dili” konusuna bakınız.
4. d. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Niceleyiciler ve Nicelenmiş Önermeler” konusuna bakınız.
5. a. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Niceleme Mantığının Dili” konusuna bakınız.
6. b. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Niceleme Mantığının Dili” konusuna bakınız.
7. d. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Niceleme Mantığının Dili” konusuna bakınız.
8. e. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Niceleme Mantığının Dili” konusuna bakınız.
9. c. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Niceleme Mantığının Dili” konusuna bakınız.
10. d. Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolik Niceleme Mantığının Dili” konusuna bakınız.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

“Bazı insanlar zengindir ama mutsuzdur” önermesi “Bazı insanlar zengindir ve bazı insanlar mutsuzdur” biçiminde yorumlanamaz çünkü “Bazı insanlar zengindir ama mutsuzdur” önermesinin doğru olması için hem zengin hem de mutsuz olan bir insan bulmamız gereklidir oysa “Bazı insanlar zengindir ve bazı insanlar mutsuzdur” önermesinin doğru olması için biri zengin biri de mutsuz farklı iki kişi bulmak yeterlidir.

Sıra Sizde 2

(a) $\forall w\, \exists y\, (Gy \wedge (Fw \vee Gy)) \leftrightarrow \forall x\, \exists w\, (Gw \wedge (Fx \vee Gw))$ önermesi geçerlidir çünkü, w bağlı değişkeni yerine x değişkeninin, y değişkeni yerine de w değişkeninin konmasıyla elde edilmiştir.

(b) $\forall w \exists x\, (Gx \wedge (Fw \vee Gx)) \leftrightarrow \forall x\, \exists w \sim(\sim Gw \vee \sim(Fx \vee Gw))$ önermesi geçerlidir çünkü, önermeler mantığında $\sim(\sim A \vee \sim B) \equiv (A \wedge B)$ olduğundan, $(Gx \wedge (Fw \vee Gx))$ ve $\sim(\sim Gw \vee \sim(Fx \vee Gw))$ formülleri niceleme mantığı bakımından eşdeğerdir. $\forall x\, \exists w \sim(\sim Gw \vee \sim(Fx \vee Gw))$ önermesi, $\forall w\, \exists x\, (Gx \wedge (Fw \vee Gx))$ önermesinden, $(Gx \wedge (Fw \vee Gx))$ yerine eşdeğeri olan $\sim(\sim Gw \vee \sim(Fx \vee Gw))$ formülünün konmasıyla elde edilmiştir.

Sıra sizde 3

Birinci adımda, $\exists x\, (Hx \leftrightarrow \forall y\, (Gx \wedge Fy))$ önermesinden, karşılıklı-koşul eklemini eleyerek,

$$\exists x\, ((Hx \wedge \forall y\, (Gx \wedge Fy)) \vee (\sim Hx \wedge \sim\forall y\, (Gx \wedge Fy)))$$

önermesi elde edilir.

İkinci adımda, değillemeleri sadece basit önermelere uygulanacak şekle getirerek,

$$\exists x\, ((Hx \wedge \forall y\, (Gx \wedge Fy)) \vee (\sim Hx \wedge \exists y \sim(Gx \wedge Fy)))$$

$$\equiv\ \exists x\, ((Hx \wedge \forall y\, (Gx \wedge Fy)) \vee (\sim Hx \wedge \exists y\, (\sim Gx \vee \sim Fy)))$$

önermesi elde edilir.

Üçüncü adımda, bağlı değişken değişiklikleriyle,

$$\exists x\, ((Hx \wedge \forall y\, (Gx \wedge Fy)) \vee (\sim Hx \wedge \exists z\, (\sim Gx \vee \sim Fz)))$$

önermesi elde edilir.

Son adımda, niceleyicileri geçiş sıralarına göre başa taşıyarak, ön-nicelemeli normal biçimdeki

$$\exists x\, \forall y\, \exists z\, ((Hx \wedge (Gx \wedge Fy)) \vee (\sim Hx \wedge (\sim Gx \wedge \sim Fz)))$$

önermesi elde edilir.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. (2000). **Sembolik Mantık El Kitabı.** (3 cilt). Ankara: METU Press.

Grünberg, T. ve Onart, A. vd. (2003). **Mantık Terimleri Sözlüğü.** Ankara: METU Press.

Kalish, D., Montague R., Mar, G. (1980) **Logic: Techniques of Formal Reasoning.** 2. Baskı. New York: Oxford University Press.

Ural, Ş. (1995). **Temel Mantık.** İstanbul: Çantay Kitabevi.

Yıldırım, C. (1976). **100 Soruda Mantık.** İstanbul: Gerçek Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999). **Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi.** İstanbul: Bilgi Yayınevi.

SEMBOLİK MANTIK

6

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Niceleme mantığında “model” kavramını açıklayabilecek,
- Nicelemeli önermeleri bir modelde denetleyebilecek,
- Nicelemeli çıkarımları bir modelde denetleyebileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Doğrusal açılım
- Model
- Karşı-model
- Nicelemelerin elenmesi
- Nicelemeli önermenin doğrusal açılımı

İçerik Haritası

Sembolik Mantık

Nicelenmiş Önermelerin Yorumlanması

- GİRİŞ
- MODELLER
- MODELLER VE NİCELEMELİ ÖNERMELER
- MODELLER VE NİCELEMELİ ÇIKARIMLAR

Nicelenmiş Önermelerin Yorumlanması

GİRİŞ

Bir önceki ünitede, gündelik dildeki nicelemeli önermeleri sezgisel bakımdan ele alarak, niceleme mantığının sembolik dilinin ve nicelemeli sembolik önermelerin temel özelliklerini tanımıştık. Bu ünitede, niceleme mantığında önermelerin yorumlanması için temel kavram olan “model” kavramını tanımlayarak, nicelemeli sembolik önermelerin, önerme kümelerinin ve çıkarımların niceleme mantığında denetlenmesi konusunu ele alacağız. Bunu yaparken önermeler mantığından edindiğimiz bilgileri de kullanacağız, çünkü önermeler mantığında ele aldığımız tüm önerme eklemleri niceleme mantığında da kullanılır. Dahası, bu önerme eklemlerinin doğruluk tablolarıyla belirlenen anlamı, niceleme mantığında da aynıdır. Önermeler mantığında gördüğümüz önerme eklemleri ile elde edilen bir bileşik önermenin doğruluk değeri, önerme ekleminin doğruluk tablosuna ve bileşenlerin doğruluk değerine göre belirlenir. Bileşenlerin nicelemeli veya nicelemesiz önermeler olması bu durumu değiştirmez. Örneğin, A ve B, *nicelemeli veya nicelemesiz,* doğruluk değeri bilinen herhangi iki önerme ise, $(A \rightarrow B)$ önermesinin doğruluk değeri, koşul ekleminin doğruluk tablosundan başka hiçbir bilgiye gerek duymadan hesaplanabilir. Ancak, tüm nicelemeli önermelerin doğruluk değerlerini basitçe bileşenlerine birer doğruluk değeri vererek belirleyemeyiz. Aksi takdirde niceleme mantığı önermeler mantığından daha güçlü bir mantık sistemi olmazdı.

Örneğin, $(A \rightarrow B)$ biçimindeki $\forall x\ Fx \rightarrow \exists x\ Gx$ önermesinin anlamının niceleme mantığı bakımından denetlenebilmesi için, $\forall x\ Fx$ ve $\exists x\ Gx$ önermelerinin doğruluk değerlerinin bir modelde nasıl belirleneceğinin ortaya konması gerekir. $\forall x\ Fx \rightarrow \exists x\ Gx$ önermesinin, sadece, $\forall x\ Fx$ doğru ve $\exists x\ Gx$ yanlış ise yanlış, diğer üç durumda doğru olduğunu söylemek niceleme mantığı bakımından doyurucu bir açıklama kabul edilemez. Göreceğimiz gibi, $\forall$ ve $\exists$ niceleyicilerinin nasıl yorumlanacağı belirlenmiş olduğundan, bir modelde $\forall x\ Fx$ ve $\exists x\ Gx$ nicelemeli önermelerinin doğruluk değerlerini, F ve G yüklemlerinin bu modeldeki karşılıklarına göre hesaplayabiliriz. Bu şekilde, önce $\forall$ ve $\exists$ niceleyicilerinin anlamlarına göre $\forall x\ Fx$ ve $\exists x\ Gx$ önermelerinin doğruluk değerlerini hesaplayabilir, ardından koşul ekleminin doğruluk tablosuna göre, $\forall x\ Fx \rightarrow \exists x\ Gx$ önermesinin doğruluk değerini hesaplayabiliriz. Bu durumun genel olarak geçerli olduğunu, içinde geçen ad ve yüklem sembollerinin bir modeldeki karşılığı bilinen tüm nicelemeli önermelerin bu modeldeki doğruluk değerinin hesaplanabileceğini göreceğiz. Bu ünitede, Kalish ve Montague (1980) tarafından da kullanılan, önerme eklemleri mantığına indirgemeye dayalı yöntemi gerekli gördüğümüz ufak bir değişiklikle kullanacağız.

Niceleme mantığında önermelerin yorumlanması için temel kavram olduğunu söylediğimiz "model" kavramını tanımlayabilmek ve kullanabilmek için kümelerle ilgili kimi temel önbilgilere ihtiyaç duyacağız. Bu nedenle, bu ünitenin ilk kısmında, kümeler ile ilgili birkaç basit kavramı hatırlatarak, "model" kavramını tanımlayacağız. İkinci kısımda, nicelemeli önermelerin modellerle ilişkisini ortaya koyacağız. Bunun için, önce nicelemelerin bir kümede elenmesi işlemini ele alıp, nicelemeli bir önermenin bir kümede doğrusal açılımını tanımlayacağız. Sonra, nicelemeli bir sembolik önermenin bir modeldeki doğruluk değerinin hesaplanışını ele alacağız. Ardından, nicelemeli bir önerme için nasıl model ve karşı-model oluşturacağımızı göreceğiz. Son kısımda, bir nicelemeli çıkarım için model ve karşı-model bulma konularını ele alacağız.

MODELLER

Kümelerle İlgili Önbilgiler

Niceleme mantığında önermelerin yorumlanması için temel kavram olan "model" kavramını ele alabilmek için, kümelerle ilgili en temel kavramlara ilişkin bilgiye ihtiyacımız olacaktır. Şimdi kümelerle ilgili ihtiyacımız olan kavramları hatırlayalım.

Varlığı mantıksal bir çelişkiye yol açmayan herhangi bir nesneler topluluğu bir kümedir.

Tanım: Küme, varlığı mantıksal bir çelişkiye yol açmayan herhangi bir nesneler topluluğudur. Bir a nesnesi S kümesini oluşturan nesnelerden biri ise, "a nesnesi S kümesinin elemanıdır" denir ve bu durum sembolik olarak "$a \in S$" şeklinde gösterilir. Eğer a nesnesi S kümesini oluşturan nesneler arasında değil ise, "a nesnesi S kümesinin elemanı değildir" denir ve bu durum sembolik olarak "$a \notin S$" biçiminde gösterilir. Kümeyi, elemanlarını "{" ve "}" küme parantezleri arasına yazarak gösteririz. Bir kümenin hiçbir elemanının olmaması da mümkündür. Hiçbir elemanı olmayan küme "boş küme" olarak adlandırılır. Boş küme { } sembolü ile gösterilir.

ÖRNEK

Haftanın adı "P" harfiyle başlayan günlerinin kümesi {Pazar, Pazartesi, Perşembe} kümesidir. 2 ile 5 arasındaki tamsayıların kümesi {3, 4} kümesidir. Haftanın adı "Z" harfiyle başlayan günlerinin kümesi { }, yani boş kümedir. Doğal sayılar kümesi {0, 1, 2, ...} kümesidir.

Bir S kümesinin eleman sayısı bir doğal sayı ise, S kümesi sonlu bir kümedir. Örneğin, {Pazar, Pazartesi, Perşembe} kümesi, 3 elemanlı bir küme olduğu için sonludur. Boş küme de, 0 elemanlı bir küme olduğu için sonlu bir kümedir. Bizim ihtiyaç duyacağımız kümeler sadece sonlu kümeler olacaktır.

Tanım: S kümesinin tüm elemanları T kümesinin de elemanları ise, "S kümesi T kümesinin altkümesidir" denir. Bu durum sembolik olarak "$S \subseteq T$" biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

(a) $\{a\} \subseteq \{a, b\}$, $\{b\} \subseteq \{a, b\}$, $\{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
(b) *Her* S *kümesi için,* $\{\ \} \subseteq S$
(c) *Her* S *kümesi için,* $S \subseteq S$

Model Kavramı

Belirttiğimiz gibi, niceleme mantığında yorumlama modellerle gerçekleşir. Her model bir küme üzerinde oluşturulur. Modelin üzerine kurulduğu küme, modelin "taşıyıcı kümesi" ya da "evreni" olarak adlandırılır.

Bir *S* kümesi üzerinde, bu kümeyi evren olarak kabul eden bir model oluşturabilmek için, yüklem ve ad sembollerini bu küme üzerinde yorumlamak gerekir. Yalnız, bir önermeyi, bir önerme kümesini veya bir çıkarımı denetlemek için, bir modeli araç olarak kullanırken, denetlediğimiz önermelerde geçmeyen yüklem ve ad sembollerinin modelde nasıl yorumlanacağını bilmemiz gerekmez. Bu nedenle, bir önermeyi, bir önerme kümesini veya bir çıkarımı herhangi bir *S* kümesi üzerindeki bir modelde denetlerken sadece ele aldığımız önermede, önerme kümesinde veya çıkarımda geçen ad ve yüklem sembollerini *S* kümesinde yorumlamamız yeterli olacaktır. Peki, bir ad ya da yüklem sembolünü *S* kümesinde yorumlamak ne demektir?

Bildiğiniz gibi, gündelik dilde bir özel adın işlevi belirli bir varlığa işaret ederek, o varlık hakkında konuşmamızı sağlamaktır. Örneğin, "Ankara" özel adı sayesinde Ankara kenti hakkında konuşabiliriz. Niceleme mantığının sembolik dilinde ad sembolleri gündelik dildeki özel adlar gibi işlev görür. Dolayısıyla, bir ad sembolünün bir kümede yorumlanması demek o ad sembolünü kümenin bir elemanı ile eşleştirmek demektir.

Bir ad sembolünün bir kümede yorumlanması, o ad sembolünün kümede işaret ettiği *elemanın* belirtilmesidir.

Gündelik dilde bir yüklemin işlevi, kimi varlıkların sahip olduğu, kimi varlıkların ise sahip olmadığı bir özelliği dile getirmektir. Örneğin, "insandır" yüklemi kimi varlıklara doğru olarak uygulanır, kimi varlıklara ise uygulanamaz. Yüklemlerin niceleme mantığının sembolik dilindeki karşılığı, yüklem sembolleridir. Bu nedenle, bir yüklem sembolünün bir kümede yorumlanması demek, o yüklem sembolünün kümedeki hangi elemanlara doğru olarak uygulanabileceğini, hangi varlıklara uygulanamayacağını belirtmek demektir. Bu ise, yüklem sembolünü kümenin bir altkümesi ile eşleştirmek demektir. Evrenin yüklem sembolünü eşleştirdiğimiz altkümesi, evrende bu yüklemin belirttiği özelliğe sahip olan nesnelerin kümesidir. Bu küme, yüklemin "kaplamı" olarak adlandırılır.

Bir yüklem sembolünün bir kümede yorumlanması, o kümede o yüklemin belirttiği özelliğe sahip elemanlardan oluşan *altkümenin* belirtilmesidir. Bu altküme yüklemin "kaplamı" olarak adlandırılır.

Bu söylediklerimizi bir tanımla dile getirelim:

Tanım: *S* sonlu bir küme ise, bir önermede, önerme kümesinde veya çıkarımda geçen her yüklem sembolü için *S* kümesinin bir altkümesi ve her ad sembolü için *S* kümesinin bir elemanından oluşan yapı, bu önermeyi, önerme kümesini veya çıkarımı denetleyebileceğimiz bir modeldir.

ÖRNEK

$\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ *önermesinde, F, G ve H yüklem sembolleri ve A ad sembolü geçmektedir. Dolayısıyla, bu önermeyi denetleyebileceğimiz bir M modeli, modelin evreni olarak bir* S_M *kümesinden, F, G ve H yüklemlerinin herbiri için* S_M *kümesinin* F^M, G^M *ve* H^M *altkümelerinden ve A ad sembolünün karşılığı olarak* S_M *kümesinin bir* A^M *elemanından oluşmalıdır. O halde, aşağıdaki modellerin herbiri* $\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ *önermesini denetleyebileceğimiz birer modeldir:*

(a) $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a,b\}$, $H^M = \{b\}$, $A^M = a$

(b) $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{b\}$, $G^M = \{b,c\}$, $H^M = \{b\}$, $A^M = c$

(c) $S_M = \{a\}$, $F^M = \{\ \}$, $G^M = \{a\}$, $H^M = \{a\}$, $A^M = a$

ÖRNEK

$\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \to GB))\ \therefore\ \exists y\,(Gy \leftrightarrow HB)$ *çıkarımında, F, G ve H yüklem sembolleri, A ve B ad sembolleri geçmektedir. Dolayısıyla, bu çıkarımı denetleyebileceğimiz bir M modeli, modelin evreni olarak bir* S_M *kümesinden, F, G ve H yüklemlerinin herbiri için* S_M *kümesinin* F^M, G^M, H^M *altkümelerinden, A ve B ad sembollerinin karşılığı olarak* S_M *kümesinin* A^M *ve* B^M *elemanlarından oluşmalıdır. O halde, aşağıdakilerin her biri* $\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \to GB))\ \therefore\ \exists y\,(Gy \leftrightarrow HB)$ *çıkarımını denetleyebileceğimiz bir modeldir:*

(a) $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a,b\}$, $H^M = \{a\}$, $A^M = a$, $B^M = a$
(b) $S_M = \{a, b,c\}$, $F^M = G^M = H^M = \{a\}$, $A^M = a$, $B^M = b$
(c) $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{\ \}$, $G^M = \{a\}$, $H^M = \{b\}$, $A^M = b$, $B^M = b$

ÖRNEK

$\{\exists x\,\exists y\,(FA \wedge {\sim}Fy),\ \forall y\,(GB \wedge {\sim}Fy)\}$ *önermeler kümesinde, F ve G yüklem sembolleri, A ve B ad sembolleri geçmektedir. Dolayısıyla, bu önermeler kümesini denetleyebileceğimiz bir M modeli, modelin evreni olarak bir* S_M *kümesinden, F ve G yüklemlerinin herbiri için* S_M *kümesinin* F^M *ve* G^M *altkümelerinden, A ve B ad sembollerinin karşılığı olarak* S_M *kümesinin* A^M *ve* B^M *elemanlarından oluşmalıdır. O halde, aşağıdakilerin her biri* $\{\exists x\,\exists y\,(FA \wedge {\sim}Fy),\ \forall y\,(GB \wedge {\sim}Fy)\}$ *önermeler kümesini denetleyebileceğimiz bir modeldir:*

(a) $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a,b\}$, $A^M = a$, $B^M = b$,
(b) $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{b\}$, $G^M = \{b,c\}$, $A^M = c$, $B^M = c$,
(c) $S_M = \{a\}$, $F^M = \{\ \}$, $G^M = \{a,b\}$, $A^M = a$, $B^M = a$

MODELLER VE NİCELEMELİ ÖNERMELER

Bir önermenin, dolayısıyla bir önermeler kümesinin veya çıkarımın, bir modelde denetlenebilmesi için, önermenin bu modelde ne ifade ettiğinin ortaya konması gerekir. Bunun ilk adımı önermedeki niceleyicilerin elenmesi ve böylece önermenin modelin taşıyıcı kümesindeki açılımının elde edilmesidir.

Nicelemeli Bir Önermenin Bir Evrende Açılımı

Bir $\boldsymbol{A}$ formülünden, v değişkeninin tüm serbest geçişleri yerine bir kümenin a elemanının konmasıyla elde edilen ifade, $\boldsymbol{A}(a/v)$ ile gösterilir. Bildiğiniz gibi, bir formülde aynı değişkenin hem serbest, hem de bağlı geçişleri olmadığını kabul ediyoruz. Buna göre, “v değişkeninin tüm serbest geçişleri yerine” ifadesi yerine, “v değişkeninin tüm geçişleri yerine” ifadesini kullanabiliriz.

Bizim karşılaşacağımız tüm durumlarda, a elemanının $\boldsymbol{A}$ formülünde geçen hangi değişken yerine konacağı belli olduğundan, $\boldsymbol{A}(a/v)$ yerine kısaca $\boldsymbol{A}(a)$ yazacağız.

ÖRNEK

(a) $\boldsymbol{A} = \forall y\,((Fx \wedge Gy) \vee (Gy \to Hx))$ *olsun.* $\boldsymbol{A}$ *formülünün tek serbest değişkeni x olduğundan,* $\boldsymbol{A}(a)$ *ifadesi* $\boldsymbol{A}$ *formülünde x değişkeninin her geçişi yerine a elemanının konması ile elde edilir:* $\boldsymbol{A}(a) = \forall y\,((Fa \wedge Gy) \vee (Gy \to Ha))$ *. Aynı şekilde,* $\boldsymbol{A}(b) = \forall y\,((Fb \wedge Gy) \vee (Gy \to Hb))$ *.*

(b) $\boldsymbol{A} = \exists x\,((FA \wedge Gy) \vee (Gy \to Hx))$ *olsun.* $\boldsymbol{A}$ *formülünün tek serbest değişkeni y olduğundan,* $\boldsymbol{A}(a)$ *ifadesi* $\boldsymbol{A}$ *formülünde y değişkeninin her geçişi yerine a elemanının konması ile elde edilir:* $\boldsymbol{A}(a) = \exists x\,((FA \wedge Ga) \vee (Ga \to Hx))$*. Aynı şekilde,* $\boldsymbol{A}(b) = \exists x\,((FA \wedge Gb) \vee (Gb \to Hx))$*.*

Gördüğünüz gibi, her iki formülde de serbest geçişleri olan tek değişken olduğundan, $\boldsymbol{A}(a/x), \boldsymbol{A}(b/x), \boldsymbol{A}(a/y), \boldsymbol{A}(b/y)$ *yerine* $\boldsymbol{A}(a), \boldsymbol{A}(b)$ *yazabildik.*

Bir nicelemeli önermenin bir kümedeki açılımını elde etmekteki temel fikir, hakkında konuştuğumuz tüm varlıklar yani "konuşma evreni" bu küme olduğunda, önermenin ifade ettiği yargıyı ortaya koymaktır. Belirttiğimiz gibi, bizim kullanacağımız tüm kümeler sonlu olacağından, önermenin açılımı da belli uzunlukta bir ifade olacaktır.

Örneğin, F gündelik dilde herhangi bir yüklem olmak üzere, "Her şey F dir" önermesini ele alalım: Bizim hakkında konuştuğumuz tüm varlıklar yani "her şey", $S = \{a, b, c\}$ kümesinin elemanları ise, "Her şey F dir" demek, hem a, hem b, hem de c F dir demektir. "Her şey F dir" önermesi sembolik olarak $\forall x\, Fx$ ile gösterildiğine göre, $\forall x\, Fx$ nicelemeli önermesinin $S = \{a, b, c\}$ kümesindeki açılımı $Fa \wedge Fb \wedge Fc$ ifadesidir.

Şimdi de, F gündelik dilde herhangi bir yüklem olmak üzere, "Bazı şeyler F dir" önermesini ele alalım: Bizim hakkında konuştuğumuz tüm varlıklar yani "her şey", $S = \{a, b, c\}$ kümesinin elemanları ise, "Bazı şeyler F dir" yani "En az bir şey F dir" demek, "Ya a, ya b, ya da c F dir" demektir. "Bazı şeyler F dir" önermesi sembolik olarak $\exists x\, Fx$ ile gösterildiğine göre, $\exists x\, Fx$ nicelemeli önermesinin $S = \{a, b, c\}$ kümesindeki açılımı $Fa \vee Fb \vee Fc$ ifadesidir.

$\forall x\, Fx$ ve $\exists x\, Fx$ nicelemeli önermelerinin $S = \{a, b, c\}$ kümesindeki açılımı için söylediklerimizi, tüm nicelemeli önermelere ve tüm sonlu kümelere genelleştirmeye çalışalım. Bunun ilk adımı, $\forall v\boldsymbol{A}$ ve $\exists v\boldsymbol{A}$ biçimindeki nicelemeli önermelerin sonlu kümelerdeki açılımını belirlemektir.

Tanım: $S = \{a, b, c, ...\}$ ve $\boldsymbol{A}$ içinde sadece v değişkeninin serbest geçtiği bir ifade olsun.

(a) $\forall v\boldsymbol{A}$ ifadesinin S kümesindeki bir doğrusal açılımı, $\boldsymbol{A}(a) \wedge \boldsymbol{A}(b) \wedge \boldsymbol{A}(c) \wedge \ldots$ ifadesidir.

(b) $\exists v\boldsymbol{A}$ ifadesinin S kümesindeki bir doğrusal açılımı, $\boldsymbol{A}(a) \vee \boldsymbol{A}(b) \vee \boldsymbol{A}(c) \vee \ldots$ ifadesidir.

$\forall v\boldsymbol{A}$ ve $\exists v\boldsymbol{A}$ birer önerme ise, $\boldsymbol{A}$ formülünde sadece v değişkeninin serbest geçişleri olabilir. Eğer $\boldsymbol{A}$ formülünde başka bir w değişkeninin serbest geçişleri olsa idi, $\forall v\boldsymbol{A}$ ve $\exists v\boldsymbol{A}$ birer önerme olamazdı çünkü w değişkeninin $\boldsymbol{A}$ formülü içindeki serbest geçişleri $\forall v\boldsymbol{A}$ ve $\exists v\boldsymbol{A}$ içinde hala serbest kalırdı. Örneğin, $\boldsymbol{A} = (Fx \wedge Fy)$ ve $v = x$ olsun. Bu durumda, ne $\forall v\boldsymbol{A}$ ne de $\exists v\boldsymbol{A}$ bir önermedir: Her ikisinde de y değişkeninin serbest geçişleri vardır.

Dolayısıyla, $\forall v$ A ifadesi bir önerme ise, S kümesindeki doğrusal açılımının $\boldsymbol{A}(a) \wedge \boldsymbol{A}(b) \wedge \boldsymbol{A}(c) \wedge \ldots$ ifadesi, $\exists v\boldsymbol{A}$ ifadesi bir önerme ise, S kümesindeki doğrusal açılımının $\boldsymbol{A}(a) \vee \boldsymbol{A}(b) \vee \boldsymbol{A}(c) \vee \ldots$ ifadesi olduğunu söylemek uygundur. Çünkü $\boldsymbol{A}(a)$, $\boldsymbol{A}(b)$, $\boldsymbol{A}(c)$ gösteriminde, a, b, c elemanlarının v değişkeninin yerine konacağı açıktır.

Bir önermede geçen $\forall v\boldsymbol{A}$ biçimindeki bir ifadenin açılımını oluşturduğumuzda, bu önermedeki $\forall v$ tümel-nicelemesini elediğimizi söyleyeceğiz. Aynı şekilde, bir önermedeki $\exists v\, \boldsymbol{A}$ biçimindeki bir ifadenin açılımını oluşturduğumuzda, bu önermedeki $\exists v$ tikel-nicelemesini elediğimizi söyleyeceğiz.

ÖRNEK

$\exists x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki doğrusal açılımını bulalım: $\exists x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesi, $\mathbf{A} = ((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ olmak üzere $\exists v\, A$ biçimindedir. Tanıma göre, $\exists v \mathbf{A}$ ifadesinin $\{a, b\}$ kümesindeki bir doğrusal açılımı, $\mathbf{A}(a) \vee \mathbf{A}(b)$ ifadesidir. Yani, $((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ formülünde, x yerine önce a sonra b koyarak elde ettiğimiz iki ifadeyi tikel-evetleme ile birleştirmemiz gerekir:

$$\mathbf{A}(a) = ((Fa \wedge GA) \vee (Ga \rightarrow Ha))$$
$$\mathbf{A}(b) = ((Fb \wedge GA) \vee (Gb \rightarrow Hb))$$

olduğundan, $\exists x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki açılımı olan ifade aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$((Fa \wedge GA) \vee (Ga \rightarrow Ha)) \vee ((Fb \wedge GA) \vee (Gb \rightarrow Hb))$$

ÖRNEK

$\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki bir doğrusal açılımını bulalım: $\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesi, $\mathbf{A} = ((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ olmak üzere $\forall v \mathbf{A}$ biçimindedir. Tanıma göre, $\forall v \mathbf{A}$ ifadesinin $\{a, b\}$ kümesindeki doğrusal açılımı, $\mathbf{A}(a) \wedge \mathbf{A}(b)$ ifadesidir. Yani, $((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ formülünde, x yerine önce a sonra b koyarak elde ettiğimiz iki ifadeyi tümel-evetleme ile birleştirmemiz gerekir:

$$\mathbf{A}(a) = ((Fa \wedge GA) \vee (Ga \rightarrow Ha))$$
$$\mathbf{A}(b) = ((Fb \wedge GA) \vee (Gb \rightarrow Hb))$$

olduğundan, $\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki açılımı olan $\mathbf{A}(a) \wedge \mathbf{A}(b)$ ifadesi aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$((Fa \wedge GA) \vee (Ga \rightarrow Ha)) \wedge ((Fb \wedge GA) \vee (Gb \rightarrow Hb))$$

Bir nicelemeli önermenin bir kümedeki doğrusal açılımı, hangi nicelemenin önce elendiğine göre değişmez.

Bir nicelemeli önermenin bir kümedeki doğrusal açılımını oluştururken, hangi nicelemenin önce elendiği sonucu değiştirmez. Örnek olarak, $\exists x \forall y\,(Fx \wedge Gy)$ önermesini $\{a, b\}$ kümesinde açalım. Önce tikel-nicelemeyi elesek, $\forall y\,(Fa \wedge Gy) \vee \forall y\,(Fb \wedge Gy)$ ifadesini, ardından tümel-nicelemeyi eleyerek

$$((Fa \wedge Ga) \wedge (Fa \wedge Gb)) \vee ((Fb \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Gb))$$

ifadesini elde edecektik. Eğer önce tümel-nicelemeyi elesek, $\exists x\,((Fx \wedge Ga) \wedge (Fx \wedge Gb))$ ifadesini, ardından tikel-nicelemeyi eleyerek yine

$$((Fa \wedge Ga) \wedge (Fa \wedge Gb)) \vee ((Fb \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Gb))$$

ifadesini elde edecektik.

Nicelemeli bir önermeden bir niceleyicinin nasıl eleneceğini gördüğümüze göre, tüm nicelemeli önermelerin sonlu bir kümede açılımını oluşturabiliriz. Çünkü tüm nicelemeli önermeler nicelemesiz formüllerden niceleyiciler ve önerme eklemleriyle elde edilmektedir.

Tanım: Bir $\mathbf{A}$ önermesinde geçen tüm nicelemelerin bir S kümesine göre elenmesiyle elde edilen ifade, $\mathbf{A}$ önermesinin S kümesindeki bir “doğrusal açılımı” olarak adlandırılır.

ÖRNEK

$A = \forall y \exists x ((Fx \wedge Gy) \vee (Gy \rightarrow Hx))$ *olsun.* A *önermesinin {a, b} kümesindeki doğrusal açılımını bulalım. Önce tümel-niceleyiciyi elersek,*

$$\exists x ((Fx \wedge Ga) \vee (Ga \rightarrow Hx)) \wedge \exists x ((Fx \wedge Gb) \vee (Gb \rightarrow Hx))$$

elde edilir. Şimdi tikel-nicelemeleri elersek,

$$(((Fa \wedge Ga) \vee (Ga \rightarrow Ha)) \vee ((Fb \wedge Ga) \vee (Ga \rightarrow Hb))) \wedge$$
$$(((Fa \wedge Gb) \vee (Gb \rightarrow Ha)) \vee ((Fb \wedge Gb) \vee (Gb \rightarrow Hb)))$$

ifadesi, $\forall y \; \exists x ((Fx \wedge Gy) \vee (Gy \rightarrow Hx))$ *önermesinin {a, b} kümesindeki doğrusal açılımı olarak elde edilir.*

ÖRNEK

$\forall y (Gy \leftrightarrow \exists x (Gy \rightarrow Hx))$ *önermesinin {a, b} kümesindeki doğrusal açılımını bulalım. Önce tümel-niceleyiciyi elersek,*

$$(Ga \leftrightarrow \exists x (Ga \rightarrow Hx)) \wedge (Gb \leftrightarrow \exists x (Gb \rightarrow Hx))$$

elde edilir. Şimdi de tikel-nicelemeleri eleyelim. Sonuçta elde edeceğimiz

$$(Ga \leftrightarrow ((Ga \rightarrow Ha) \vee (Ga \rightarrow Hb))) \wedge (Gb \leftrightarrow ((Gb \rightarrow Ha) \vee (Gb \rightarrow Ha)))$$

ifadesi, $\forall y (Gy \leftrightarrow \exists x (Gy \rightarrow Hx))$ *önermesinin {a, b} kümesindeki doğrusal açılımıdır.*

SIRA SİZDE 1

$\exists x (Fx \rightarrow \forall y (Gy \wedge GA))$ önermesinin {a, b} kümesindeki doğrusal açılımını oluşturunuz.

Bir Yorumlamada Bir Önermenin Doğruluk Değerinin Hesaplanması

Bir nicelemeli önermenin, evreni S_M olan bir M modelinde doğruluk değerinin hesaplanması, $\boldsymbol{Y}$ önermede geçen bir yüklem, $s \in S_M$ olmak üzere $\boldsymbol{Y}s$ biçimindeki ifadelerin modeldeki doğruluk değerine dayanmaktadır. Dolayısıyla ilk olarak bu biçimdeki ifadelerin modeldeki doğruluk değerinin belirlenmesi gerekir.

Tanım: M bir model, S_M bu modelin evreni, $\boldsymbol{Y}$ bir yüklem sembolü ve $s \in S_M$ olsun. $\boldsymbol{Y}s$ ifadesi M modelinde ancak ve ancak $s \in \boldsymbol{Y}^M$ ise doğrudur. Yani,

$s \in \boldsymbol{Y}^M$ ise $\boldsymbol{Y}s$ ifadesinin M modelindeki doğruluk değeri **D**,
$s \notin \boldsymbol{Y}^M$ ise $\boldsymbol{Y}s$ ifadesinin M modelindeki doğruluk değeri **Y** olur.

ÖRNEK

{a, b, c} kümesi üzerindeki M modelinde $F^M = \{a, b\}$, $G^M = \{b, c\}$ *olsun. Buna göre,* $a \in F^M$ *ve* $b \in F^M$ *olduğundan, Fa ve Fb doğru,* $c \notin F^M$ *olduğundan Fc yanlıştır. Ga yanlış, Gb ve Gc ise doğrudur.*

Bir $\boldsymbol{A}$ önermesinin bir M modelindeki doğruluk değerini hesaplamak için

1. $\boldsymbol{A}$ önermesinin S_M kümesindeki açılımını oluştururuz.
2. $\boldsymbol{A}$ önermesinin S_M kümesindeki açılımında ad sembollerinin yerine bunların modeldeki karşılığı olan elemanları koyarız. Sonuçta elde ettiğimiz ifade $\boldsymbol{A}$ önermesinin M modelindeki ifadesidir.
3. Elde ettiğimiz ifade $\boldsymbol{Y}$ bir yüklem, $s \in S_M$ olacak şekilde $\boldsymbol{Y}s$ biçimindeki ifadelerden ve önerme eklemlerinden oluştuğuna göre, bu önermenin doğruluk değerini önceki tanım ve önerme eklemlerinin doğruluk değerlerine göre hesaplarız. Bulduğumuz doğruluk değeri $\boldsymbol{A}$ önermesinin M modelindeki doğruluk değeridir.

ÖRNEK

$S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a,b\}$, $A^M = a$ olsun. $\exists x\ (Fx \rightarrow \forall y\ (GA \rightarrow Fy))$ önermesinin aşağıda belirtilen modeldeki doğruluk değerini hesaplayalım.

(a) *İlk olarak, önermenin bu modeldeki doğrusal açılımını hesaplayalım. İlk olarak tikel nicelemeyi eleyelim:*

$$((Fa \rightarrow \forall y\ (GA \rightarrow Fy)) \vee (Fb \rightarrow \forall y\ (GA \rightarrow Fy)))$$

Tümel nicelemeleri elediğimizde

$$(Fa \rightarrow ((GA \rightarrow Fa) \wedge (GA \rightarrow Fb))) \vee (Fb \rightarrow ((GA \rightarrow Fa) \wedge (GA \rightarrow Fb)))$$

(b) *A ad sembolünün karşılığını yerine koyduğumuzda,*

$$(Fa \rightarrow ((Ga \rightarrow Fa) \wedge (Ga \rightarrow Fb))) \vee (Fb \rightarrow ((Ga \rightarrow Fa) \wedge (Ga \rightarrow Fb)))$$

(c) ***Y**s biçimindeki ifadelerin doğruluk değerlerini tanıma göre yerlerine koyduğumuzda,*

$$(\mathbf{D} \rightarrow ((\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}) \wedge (\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Y}))) \vee (\mathbf{Y} \rightarrow ((\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}) \wedge (\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Y})))$$

*elde edilir. Önerme eklemlerinin doğruluk tablolarına göre bileşenlerin doğruluk değerlerini hesaplayarak ilerlersek, bu önermenin doğruluk değeri **D** olarak hesaplanır. Dolayısıyla $\exists x\ (Fx \rightarrow \forall y\ (GA \rightarrow Fy))$ önermesi bize verilen modelde doğrudur.*

SIRA SİZDE 2

$S_M = \{a, b\}, F^M = \{a\}, G^M = \{a, b\}, A^M = a$ olsun. Aşağıda verilen önermelerin bu modeldeki doğruluk değerini hesaplayınız.

(a) $(FA \rightarrow GA) \rightarrow (\exists x\ Fx \rightarrow \exists x\ Gx)$

(b) $\exists x\ (Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x\ Gx \rightarrow \forall x\ Fx)$

Nicelemeli Önermeler İçin Model ve Karşı-Model Oluşturulması

Önermeler mantığında, bize verilen bir önermenin doğrulayıcı ya da yanlışlayıcı yorumlamalarını, doğruluk tabloları ve çözümleyici çizelge yöntemi ile nasıl oluşturabileceğimizi görmüştük. Bu kısımda, bize verilen bir nicelemeli önermenin doğrulayıcı ya da yanlışlayıcı yorumlamalarını nasıl oluşturabileceğimizi göreceğiz. Niceleme mantığında yaygın kullanıma uygun olarak, bir önermenin doğrulayıcı yorumlaması yerine bu önermenin bir "modeli", yanlışlayıcı yorumlaması yerine "karşı-modeli" ifadelerini kullanacağız.

Bir önermenin bir *modelini* oluşturmak için, oluşturacağımız modelin evreni olmak üzere bir küme belirleyip, bu kümede önermenin doğrusal açılımını oluşturduktan sonra, ad ve yüklem sembollerini, önermenin açılımını *doğru* yapacak şekilde yorumlamamız gerekir.

A önermesinde geçen tüm yüklem ve ad sembollerinin yorumlandığı ve ***A*** önermesinin doğru olduğu bir *M* modeli *A* önermesinin bir modelidir. Eğer ***A*** önermesinin bir *modelini* oluşturmak istiyorsak, oluşturacağımız *M* modelinin evreni olmak üzere bir *S* kümesi seçip, bu kümede ***A*** önermesinin açılımını oluşturduktan sonra, ad ve yüklem sembollerini, ***A*** önermesinin açılımını *doğru* yapacak şekilde yorumlamamız gerekir. Bildiğiniz gibi, yorumlamada ad sembollerine karşılık *S* kümesinin bir elemanını, yüklem sembollerine karşılık olarak da *S* kümesinin bir altkümesini seçmemiz gerekir.

Olabildiğince küçük bir model oluşturmak isteyeceğimiz için önce tek elemanı olan bir küme üzerinde bir model kurmaya çalışıp, olmuyorsa eleman sayısını gittikçe arttırmak iyi bir yoldur.

ÖRNEK

$\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesi için en fazla iki elemanlı bir küme üzerinde, bir karşı-model bulmaya çalışalım: Modeli ilk olarak {a} kümesi üzerinde oluşturmayı deneyelim. $\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesinin {a} kümesindeki açılımı $((Fa \wedge GA) \vee (Ga \rightarrow Ha))$ ifadesidir. Tikel-evetlemenin doğru olması için bileşenlerden birinin doğru olması yeterlidir. Buna göre, $(Fa \wedge GA)$ veya $(Ga \rightarrow Ha)$ ifadelerinden birini doğru yapmaya çalışalım: $(Fa \wedge GA)$ tümel-evetlemesinin doğru olması için hem Fa hem de GA doğru olmalıdır. Yani, $a \in F^M$ ve $A^M \in G^M$ olmalıdır. Dolayısıyla, A^M için tek seçenek olan a elemanını seçmeli ve $a \in G^M$ olmasını sağlamalıyız. Bu söylediklerimize göre, {a} kümesi üzerinde, $A^M = a$, $F^M = \{a\}$ ve $G^M = \{a\}$ modelinde $((Fa \wedge Ga) \vee (Ga \rightarrow Ha))$ ifadesi doğrudur. Bu ifade M modelinde $\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesinin karşılığı olduğundan, oluşturduğumuz M modeli, $\forall x\,((Fx \wedge GA) \vee (Gx \rightarrow Hx))$ önermesinin bir modelidir.

ÖRNEK

$\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge \sim Fy)$ önermesi için bir model bulmaya çalışalım. Modeli ilk olarak {a} kümesi üzerinde oluşturmayı deneyelim: $\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx) \wedge \exists y(Gy \wedge \sim Fy)$ önermesinin {a} kümesindeki açılımı $(Fa \wedge \sim Ga) \wedge (Ga \wedge \sim Fa)$ ifadesidir. Bu ifade önerme eklemleri mantığı bakımından bir çelişme önermesi biçimi olan $(\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \wedge \sim\mathbf{A})$ biçiminde olduğundan, F^M ve G^M nasıl seçilirse seçilsin, doğru olamaz. Dolayısıyla iki elemanlı bir küme üzerinde bir model kurmayı denemeliyiz:

$\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge \sim Fy)$ önermesinin {a, b} kümesindeki açılımı
$((Fa \wedge \sim Ga) \vee (Fb \wedge \sim Gb)) \wedge ((Ga \wedge \sim Fa) \vee (Gb \wedge \sim Fb))$

ifadesidir. Oluşturmak istediğimiz modelde, bu ifadenin, doğru olması için hem $((Fa \wedge \sim Ga) \vee (Fb \wedge \sim Gb))$ hem de $((Ga \wedge \sim Fa) \vee (Gb \wedge \sim Fb))$ ifadelerinin doğru olması gereklidir. Her iki ifade de tikel-evetleme olduğundan, birer bileşenlerini doğru yapmak yeterlidir. Birinci ifadeden $(Fa \wedge \sim Ga)$ ifadesini, ikinci ifadeden de $(Gb \wedge \sim Fb)$ ifadesini doğru yapalım. Bunun için $a \in F^M$, $a \notin G^M$, $b \in G^M$, $b \notin F^M$ olması gerekli ve yeterlidir. Dolayısıyla aşağıdaki, M modeli $\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge \sim Fy)$ önermesinin bir modelidir:

$$S_M = \{a, b\},\ F^M = \{a\},\ G^M = \{b\}$$

$\boldsymbol{A}$ önermesinde geçen tüm yüklem ve ad sembollerinin yorumlandığı ve $\boldsymbol{A}$ önermesinin yanlış olduğu bir M modeli $\boldsymbol{A}$ önermesinin bir karşı-modelidir. $\boldsymbol{A}$ önermesinin bir karşı-modelini oluşturmak için, oluşturacağımız M karşı-modelinin evreni olmak üzere bir S kümesi seçip bu kümede $\boldsymbol{A}$ önermesinin açılımını oluşturduktan sonra, ad ve yüklem sembollerini $\boldsymbol{A}$ önermesinin açılımını yanlış yapacak şekilde yorumlamamız gerekir. Model ararken olduğu gibi, bir elemanlı bir kümeyle başlayıp, gerektikçe eleman sayısını arttırmalıyız.

Bir önermenin bir *karşı-modelini* oluşturmak için, oluşturacağımız modelin evreni olmak üzere bir küme belirleyip, bu kümede önermenin doğrusal açılımını oluşturduktan sonra, ad ve yüklem sembollerini, önermenin açılımını *yanlış* yapacak şekilde yorumlamamız gerekir.

ÖRNEK

Az önceki örnekten yola çıkarak, $\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge \sim Fy)$ önermesi için bir elemanlı bir karşı-modeli kolaylıkla bulabiliriz. Aslında, bir elemanlı her model, $\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge \sim Fy)$ önermesinin karşı-modelidir. Çünkü önermenin bir elemanlı {a} kümesindeki açılımı olan $(Fa \wedge \sim Ga) \wedge (Ga \wedge \sim Fa)$ ifadesi, önermeler mantığı bakımından bir çelişme önermesi biçimi olan $(\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \wedge \sim\mathbf{A})$ biçiminde olduğundan, F^M ve G^M nasıl seçilirse seçilsin, doğru olamaz.

ÖRNEK

$(\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx) \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesi için bir karşı-model bulalım. Önce tek elemanlı $\{a\}$ kümesi üzerinde bir karşı-model oluşturmaya çalışalım: Öncelikle, $(\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx) \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesinin $\{a\}$ kümesindeki açılımını bulalım. $\exists x\, Fx$ önermesinin $\{a\}$ kümesindeki açılımı Fa, $\exists x\, Gx$ önermesinin $\{a\}$ kümesindeki açılımı Ga, $\exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesinin $\{a\}$ kümesindeki açılımı ise $(Fa \wedge Ga)$ ifadesidir. Dolayısıyla, $(\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx) \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesinin $\{a\}$ kümesindeki açılımı $(Fa \wedge Ga) \rightarrow (Fa \wedge Ga)$ olur. Bu ifade bir totoloji örneği olduğundan yanlış olamaz. Dolayısıyla, tek elemanlı bir küme üzerinde, $(\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx) \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesine karşı-model oluşturulamaz.

İki elemanlı {a, b} kümesi üzerinde bir karşı-model oluşturmayı deneyelim: $(\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx) \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki açılımı,

$$((Fa \vee Fb) \wedge (Ga \vee Gb)) \rightarrow ((Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$$

ifadesidir. Bu ifadeyi yanlış yapmak için, $(Fa \vee Fb) \wedge (Ga \vee Gb))$ ifadesi doğru, $((Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$ ifadesi yanlış olmalıdır. Kolaylıkla görebileceğiniz gibi, Fa ve Gb ifadelerini doğru, Fb ve Ga ifadelerini yanlış kabul ettiğimizde, $((Fa \vee Fb) \wedge (Ga \vee Gb))$ ifadesi doğru, $((Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$ ifadesi yanlış olur. Buna göre,

$$S_M = \{a, b\},\ F^M = \{a\},\ G^M = \{b\}$$

modelinde $(Fa \vee Fb) \wedge (Ga \vee Gb)) \rightarrow ((Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$ ifadesi yanlıştır. Bu ifade, modelde $(\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx) \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesinin karşılığı olduğundan, bu model önermenin bir karşı-modelidir.

Tüm modellerde doğru olan bir nicelemeli önerme, niceleme mantığında “geçerli” bir önermedir. Bu kısımda anlattığımız yöntem, nicelemeli önermelerin geçerliliğini göstermek için de kullanılabilir: Eğer içinde n tane yüklem sembolü geçen bir önerme için, en çok 2^n elemanlı bir kümede karşı-model oluşturulamazsa, bu önermenin karşı-modeli yoktur. Dolayısıyla, bu önerme niceleme mantığında geçerli bir önermedir. Kullanışlı olmadığından, bunu bir yöntem olarak geliştirmeyeceğiz. Niceleme mantığında geçerlilik denetlemesini sekizinci ünitede ele alacağımız çözümleyici çizelge yöntemiyle gerçekleştireceğiz.

MODELLER VE NİCELEMELİ ÇIKARIMLAR

Önermeler mantığında bir çıkarımın geçersiz olduğunu göstermek için, çıkarımın doğruluk tablosunu yaparak, çıkarımın tüm öncüllerinin doğru ancak çıkarımın sonuç önermesinin yanlış olduğu bir doğruluk değerlemesi bulmak yeterli idi. Niceleme mantığında bir çıkarımın geçersiz olduğunu, çıkarımın tüm öncüllerinin doğru ancak çıkarımın sonuç önermesinin yanlış olduğu bir “karşı-model” oluşturarak gösterebiliriz. Bir çıkarımın bir karşı-modeli varsa, bu çıkarım niceleme mantığında geçersizdir. Çıkarımın karşı-modeli olmayan tüm modeller çıkarımın bir modeli kabul edilir. Yani, bir modelin çıkarımın bir modeli olması için, öncüllerden en az biri bu modelde yanlış olmalı veya tüm öncüller bu modelde doğru ise, sonucun da bu modelde doğru olması gerekir.

Bir çıkarımın tüm öncüllerini doğru, sonuç önermesini yanlış yapan bir karşı-modeli varsa, bu çıkarım niceleme mantığında geçersizdir.

Bir çıkarımın karşı-modelini oluştururken tüm önermeleri aynı modelde değerlendirmek gereklidir. Öncüllerin doğru ve sonucun yanlış olduğu ayrı modeller oluşturmakla çıkarımın geçersiz olduğunu gösteremeyiz. Bu nedenle, çıkarımın geçersiz olduğunu gösteren bir karşı-model oluşturmaya çalışırken aşağıdaki adımları izleriz:

(a) Sonlu bir S kümesi seçmek,
(b) Çıkarımı oluşturan tüm önermelerin $\boldsymbol{A}$ kümesindeki bir doğrusal açılımını oluşturmak,
(c) Elde edilen ifadede, bileşenlere öncülleri doğru, sonuç önermesini yanlış yapacak şekilde doğruluk değeri vermeye çalışmak,
(d) Elde edilen doğruluk değerlemesine göre, ad sembollerine karşılık gelecek elemanları ve yüklemlerin kaplamlarını belirlemek.

ÖRNEK

$\exists x \exists y\, (Fx \wedge {\sim}Fy) \therefore \exists x \forall y\, (Fx \wedge {\sim}Fy)$ *çıkarımı için iki elemanlı bir karşı-model bulmaya çalışalım:*

$\exists x \exists y\, (Fx \wedge {\sim}Fy)$ *önermesinin {a, b} kümesindeki açılımını elde etmek için, önce* $\exists x$ *nicelemesini eleyelim. Elde edeceğimiz ifade* $\exists y\, (Fa \wedge {\sim}Fy) \vee \exists y\, (Fb \wedge {\sim}Fy)$ *ifadesidir. Şimdi her iki* $\exists y$ *nicelemesini de elersek,*

$$((Fa \wedge {\sim}Fa) \vee (Fa \wedge {\sim}Fb)) \vee ((Fb \wedge {\sim}Fa) \vee (Fb \wedge {\sim}Fb))$$

ifadesini elde ederiz.

$\exists x \forall y\, (Fx \wedge {\sim}Fy)$ *önermesinin {a, b} kümesindeki açılımını elde etmek için, önce* $\exists x$ *nicelemesini eleyelim. Elde edeceğimiz ifade* $\forall y\, (Fa \wedge {\sim}Fy) \vee \forall y\, (Fb \wedge {\sim}Fy)$ *ifadesidir. Şimdi her iki* $\forall y$ *nicelemesini de elersek,*

$$((Fa \wedge {\sim}Fa) \wedge (Fa \wedge {\sim}Fb)) \vee ((Fb \wedge {\sim}Fa) \wedge (Fb \wedge {\sim}Fb))$$

ifadesini elde ederiz.

$((Fa \wedge {\sim}Fa) \vee (Fa \wedge {\sim}Fb)) \vee ((Fb \wedge {\sim}Fa) \vee (Fb \wedge {\sim}Fb))$ *ifadesinin doğru olması için,* $(Fa \wedge {\sim}Fb)$ *veya* $(Fb \wedge {\sim}Fa)$ *ifadelerinden birinin doğru olması gerekir.* $(Fa \wedge {\sim}Fb)$ *ifadesini doğru kabul edelim. Dolayısıyla, a elemanı F yükleminin kaplamında yer almalı b elemanı ise F elemanının kaplamında yer almamalıdır.*

$((Fa \wedge {\sim}Fa) \wedge (Fa \wedge {\sim}Fb)) \vee ((Fb \wedge {\sim}Fa) \wedge (Fb \wedge {\sim}Fb))$ *ifadesi ise hiçbir durumda doğru olamaz. Bu ifade bir tikel-evetleme olduğundan,* $(Fa \wedge {\sim}Fa) \wedge (Fa \wedge {\sim}Fb)$ *ya da* $(Fb \wedge {\sim}Fa) \wedge (Fb \wedge {\sim}Fb)$ *bileşenlerinden birinin doğru olması yeterlidir. Ancak,* $(Fa \wedge {\sim}Fa)$ *ifadesi nedeniyle* $(Fa \wedge {\sim}Fa) \wedge (Fa \wedge {\sim}Fb)$ *ifadesi,* $(Fb \wedge {\sim}Fb)$ *ifadesi nedeniyle de* $(Fb \wedge {\sim}Fa) \wedge (Fb \wedge {\sim}Fb)$ *ifadesi doğru olamaz.*

Dolayısıyla, $\exists x \exists y\, (Fx \wedge {\sim}Fy) \therefore \exists x \forall y\, (Fx \wedge {\sim}Fy)$ *çıkarımı için karşı-modeli aşağıdaki şekilde oluşturabiliriz.*

$$S_M = \{a, b\},\ F^M = \{a\}$$

ÖRNEK

$\forall x \exists y\, (Fx \wedge Gy) \therefore \exists y \forall x\, (Fx \wedge Gy)$ *çıkarımı için en çok iki elemanlı bir karşı-model bulmaya çalışalım:*

Modeli ilk olarak, {a} kümesi üzerinde kurmaya çalışalım:

Öncül: $\forall x \exists y\, (Fx \wedge Gy)$ önermesinden tümel-niceleyiciyi elediğimizde $\exists y\, (Fa \wedge Gy)$ elde edilir. Bu ifadeden tikel-niceleyiciyi elersek $(Fa \wedge Ga)$ elde edilir.

Sonuç: $\exists y \forall x\, (Fx \wedge Gy)$ önermesinden tikel niceleyiciyi elediğimizde $\forall x\, (Fx \wedge Ga)$ elde edilir. Şimdi bu ifadeden tümel-niceleyiciyi elersek $(Fa \wedge Ga)$ elde edilir.

Dolayısıyla, çıkarımın {a} kümesindeki açılımı $(Fa \wedge Ga) \therefore (Fa \wedge Ga)$ ifadesidir. Bu ifade, önermeler mantığında geçerli bir çıkarım biçimi olan $(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \therefore (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$ biçiminde olduğundan, F ve G yüklemlerinin nasıl yorumlarsak yorumlayalım, öncülünü doğru sonuç önermesini yanlış yapamayız.

Tek elemanlı bir karşı-model bulamayacağımıza göre, karşı-modeli, *{a, b}* kümesi üzerinde kurmaya çalışalım:

Öncül: $\forall x \exists y\ (Fx \wedge Gy)$ önermesinden tümel-niceleyiciyi eleyerek elde edeceğimiz önerme $\exists y\ (Fa \wedge Gy) \wedge \exists y\ (Fb \wedge Gy)$ ifadesidir. Bu ifadeden tikel-niceleyicileri eleyerek elde edeceğimiz ifade şudur:

$$((Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)) \wedge ((Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$$

Sonuç önermesi: $\exists y \forall x\ (Fx \wedge Gy)$ önermesinden tikel niceleyiciyi elediğimizde $\forall x\ (Fx \wedge Ga) \vee \forall x\ (Fx \wedge Gb)$ elde edilir. Şimdi bu ifadeden tümel-niceleyicileri elersek elde edeceğimiz ifade şudur:

$$((Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Ga)) \vee ((Fa \wedge Gb) \wedge (Fb \wedge Gb))$$

Şimdi F ve G yüklemlerinin kaplamlarını, *{a, b}* kümesi üzerinde elde edeceğimiz modelde öncül önermesi doğru, sonuç önermesi yanlış olacak şekilde belirlemeye çalışalım:

$((Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)) \wedge ((Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$ ifadesini doğru yapmak için, hem $(Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)$ hem de $(Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb)$ ifadelerini doğru yapmalıyız. Bunun için, hem Fa hem de Fb doğru olmalı, Ga ve Gb ifadelerinden de en az biri doğru olmalıdır. Hangisini doğru kabul edeceğimize, sonuç önermesine bakarak karar verelim:

Sonuç önermesinin açılımı olan $((Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Ga)) \vee ((Fa \wedge Gb) \wedge (Fb \wedge Gb))$ ifadesini yanlış yapmak için, hem Fa hem de Fb ifadelerini doğru kabul ettiğimize göre, hem Ga hem de Gb yanlış olmalıdır. Ga doğru olursa, $((Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Ga))$, Gb doğru olursa, $((Fa \wedge Gb) \wedge (Fb \wedge Gb))$ doğru olur. Sonuç ifadesi, bu iki ifadenin tikel-evetlemesi olduğundan, bu iki ifadeden birinin bile modelde doğru olması durumunda, sonuç ifadesi doğru olur.

Sonuç olarak, $\forall x \exists y\ (Fx \wedge Gy) \therefore \exists y \forall x\ (Fx \wedge Gy)$ çıkarımı için iki elemanlı bir karşı-model bulunamaz.

SIRA SİZDE 3

$\exists x\ \exists y\ (Fx \wedge Gy) \therefore \forall x\ \exists y\ (Fx \wedge Gy)$ çıkarımı için iki elemanlı bir karşı- model bulunuz.

Bu kısımda anlattığımız yöntem, nicelemeli çıkarımların geçerliliğini göstermek için de kullanılabilir: Eğer içinde n tane yüklem sembolü geçen bir çıkarım için, en çok 2^n elemanlı bir kümede karşı-model oluşturulamazsa, bu çıkarımın karşı-modeli yoktur. Dolayısıyla, bu çıkarım niceleme mantığında geçerli bir önermedir. Önermeler kısmında belirttiğimiz gibi, kullanışlı olmadığından, bunu bir yöntem olarak geliştirmeyeceğiz. Niceleme mantığında çıkarımların geçerlilik denetlemesini sekizinci ünitede ele alacağımız çözümleyici çizelge yöntemiyle gerçekleştireceğiz.

Özet

Niceleme mantığında “model” kavramını açıklayabilmek.

Niceleme mantığında yorumlama modellerle gerçekleşir. Her model bir küme üzerinde oluşturulur. Modelin üzerine kurulduğu küme, modelin “taşıyıcı kümesi” ya da “evreni” olarak adlandırılır. Bir S kümesi üzerinde, bu kümeyi evren olarak kabul eden bir model oluşturabilmek için, yüklem ve ad sembollerini bu küme üzerinde yorumlamak gerekir. Bir önermeyi, önerme kümesini veya çıkarımı herhangi bir S kümesi üzerindeki bir modelde denetlerken, sadece ele aldığımız önermede, önerme kümesinde veya çıkarımda geçen ad ve yüklem sembollerini S kümesinde yorumlamamız yeterlidir.

Gündelik dilde bir özel adın işlevi belirli bir varlığa işaret ederek, o varlık hakkında konuşmamızı sağlamaktır. Niceleme mantığının sembolik dilinde ad sembolleri gündelik dildeki özel adlar gibi işlev görür. Dolayısıyla, bir ad sembolünün bir kümede yorumlanması demek, o ad sembolünü kümenin bir elemanı ile eşleştirmek demektir.

Gündelik dilde bir yüklemin işlevi, kimi varlıkların sahip olduğu, kimi varlıkların ise sahip olmadığı bir özelliği dile getirmektir. Yüklemlerin niceleme mantığının sembolik dilindeki karşılığı, yüklem sembolleridir. Bu nedenle, bir yüklem sembolünün bir kümede yorumlanması demek, o yüklem sembolünün kümedeki hangi elemanlara doğru olarak uygulanabileceğini, hangi varlıklara uygulanamayacağını belirtmek demektir. Bu ise, yüklem sembolünü kümenin bir altkümesi ile eşleştirmek demektir. Evrenin yüklem sembolünü eşleştirdiğimiz altkümesi, evrende bu yüklemin belirttiği özelliğe sahip olan nesnelerin kümesidir. Bu altküme yüklemin o evrendeki “kaplamı” olarak adlandırılır.

S sonlu bir küme ise, bir önermede, önerme kümesinde veya çıkarımda geçen her yüklem sembolü için S kümesinin bir altkümesinden ve her ad sembolü A için S kümesinin bir elemanından oluşan yapı, bu önermeyi, önerme kümesini veya çıkarımı denetleyebileceğimiz bir modeldir.

Nicelemeli önermeleri bir modelde denetleyebilmek.

Bir nicelemeli sembolik önermeyi bir modelde denetleyebilmek için, önce önermenin o modelin evreninde açılımını oluşturmamız gerekir. Bu işlem, önermedeki tümel ve tikel-nicelemelerin elenmesiyle gerçekleştirilir. Önermedeki nicelemeler hangi sırayla elenirse elensin, elde edeceğimiz açılım değişmez. $S = \{a, b, c, \ldots\}$ ise, $\forall v \boldsymbol{A}$ ifadesinin S kümesindeki bir doğrusal açılımı, $\boldsymbol{A}(a) \wedge \boldsymbol{A}(b) \wedge \boldsymbol{A}(c) \wedge \ldots$ ifadesidir. $\exists v \boldsymbol{A}$ ifadesinin S kümesindeki doğrusal açılımı, $\boldsymbol{A}(a) \vee \boldsymbol{A}(b) \vee \boldsymbol{A}(c) \vee \ldots$ ifadesidir. Bir önermede geçen $\forall v \boldsymbol{A}$ ifadesi yerine bu ifadenin S kümesindeki açılımını yazdığımızda, burada geçen $\forall v \boldsymbol{A}$ tümel-nicelemesini S kümesine göre elediğimizi söyleriz. Aynı şekilde, bir önermede geçen $\exists v \boldsymbol{A}$ ifadesinin yerine bu ifadenin S kümesindeki açılımını yazdığımızda burada geçen $\exists v$ tikel-nicelemesini S kümesine göre elediğimizi söyleriz. Bir $\boldsymbol{A}$ önermesinde geçen tüm niceleyicilerin S kümesine göre elenmesiyle elde edilen ifade, $\boldsymbol{A}$ önermesinin S kümesindeki “doğrusal açılımı” olarak adlandırılır.

Nicelemeli bir sembolik önermenin bir modelin evrenindeki doğrusal açılımını oluşturduktan sonra, elde ettiğimiz ifadenin modeldeki doğruluk değeri, önermenin bu modeldeki doğruluk değeridir. Önermenin açılımı olan ifadenin bu modeldeki doğruluk değerini bulmak için, ilk olarak ad sembollerinin yerine modeldeki karşılıklarını koyarız. Şimdi elde ettiğimiz ifade, $\boldsymbol{Y}$ bir yüklem sembolü, s ise evrenin bir elemanı olmak üzere sadece $\boldsymbol{Y}s$ biçimindeki ifadelerden ve önerme eklemlerinden oluşur. Bu ifadenin modeldeki doğruluk değerini belirlemek için önce $\boldsymbol{Y}s$ biçimindeki ifadelerin doğruluk değerlerinin belirlenmesi gerekir: Eğer s elemanı $\boldsymbol{Y}$ yükleminin modeldeki yorumu olan $\boldsymbol{Y}^M$ altkümesinin bir elemanı ise, $\boldsymbol{Y}s$ ifadesi doğru, değilse yanlıştır. İfadede geçen $\boldsymbol{Y}s$ biçimindeki ifadelerin doğruluk değerlerinin belirlenmesinden sonra, önerme eklemlerinin doğruluk tablolarına göre ilerleyerek tüm ifadenin doğruluk değeri elde edilir.

Nicelemeli bir $\boldsymbol{A}$ önermesi bir M modelinde doğru ise M modeli $\boldsymbol{A}$ önermesinin modelidir, $\boldsymbol{A}$ önermesi bir M modelinde yanlış ise M modeli $\boldsymbol{A}$ önermesinin bir karşı-modelidir. Bize verilen bir nicelemeli önerme için (varsa) model veya karşı-model oluşturabiliriz. Bunun için önce modeli veya karşı-modeli oluşturmak istediğimiz kümede önermenin açılımını oluştururuz. Ardından, *model* bulmak için, ad ve yüklem sembollerini, önermeyi bu modelde *doğru* yapacak şekilde, *karşı-model* bulmak için ise, ad ve yüklem sembollerini, önermeyi bu modelde *yanlış* yapacak şekilde yorumlarız.

Tüm modellerde doğru olan bir nicelemeli önerme, niceleme mantığında "geçerli" bir önermedir. Model oluşturma yöntemi, nicelemeli önermelerin geçerliliğini göstermek için de kullanılabilir: Eğer içinde n tane yüklem sembolü geçen bir önerme için, en çok 2^n elemanlı bir kümede karşı-model oluşturulamazsa, bu önermenin karşı-modeli yoktur. Dolayısıyla, bu önerme niceleme mantığında geçerli bir önermedir. Kullanışlı olmadığından, bunu bir yöntem olarak geliştirmeyeceğiz. Niceleme mantığında önermelerin geçerlilik denetlemesini sekizinci ünitede ele alacağımız çözümleyici çizelge yöntemiyle gerçekleştireceğiz.

AMAÇ 3

Nicelemeli çıkarımları bir modelde denetleyebilmek.

Önermeler mantığında bir çıkarımın geçersiz olduğunu göstermek için, bu çıkarımın tüm öncüllerinin doğru ancak çıkarımın sonuç önermesinin yanlış olduğu bir doğruluk değerlemesi bulmak yeterli idi. Böyle bir doğruluk değerlemesini, çıkarımın doğruluk tablosunu veya çözümleyici çizelgesini oluşturarak, bulabiliyorduk. Niceleme mantığında ise, bir çıkarımın geçersiz olduğunu göstermek için, çıkarımın tüm öncüllerinin doğru ancak çıkarımın sonuç önermesinin yanlış olduğu bir model oluşturmamız gerekir. Böyle bir model, varsa, çıkarımın niceleme mantığında geçersiz olduğunu gösterir ve bu model çıkarımın bir karşı-modelidir. Çıkarımın karşı-modeli olmayan tüm modeller çıkarımın bir modeli kabul edilir. Yani, bir modelin çıkarımın bir modeli olması için, öncüllerden en az biri bu modelde yanlış olmalı veya tüm öncüller bu modelde doğru ise, sonucun da bu modelde doğru olması gerekir.

Bir çıkarımın karşı-modelini oluştururken tüm önermeleri aynı modelde değerlendirmek gereklidir. Öncüllerin doğru ve sonucun yanlış olduğu ayrı modeller oluşturmakla çıkarımın geçersiz olduğunu gösteremeyiz. Çıkarımın geçersiz olduğunu gösteren bir karşı-model oluşturmaya çalışırken aşağıdaki adımları izleriz:

1. Sonlu bir S kümesi seçmek,
2. Çıkarımı oluşturan tüm önermelerin S kümesindeki bir doğrusal açılımını oluşturmak,
3. Elde edilen ifadenin bileşenlerine, öncülleri doğru, sonuç önermesini yanlış yapacak şekilde doğruluk değeri vermek,
4. Elde edilen doğruluk değerlemesine göre, ad sembollerine karşılık gelecek elemanların ve yüklemlerin kaplamlarını belirlemek.

Bu yöntem, nicelemeli çıkarımların geçerliliğini göstermek için de kullanılabilir: Eğer içinde n tane yüklem sembolü geçen bir çıkarım için, en çok 2^n elemanlı bir kümede karşı-model oluşturulamazsa, bu çıkarımın karşı-modeli yoktur. Dolayısıyla, bu çıkarım niceleme mantığında geçerli bir önermedir. Önermeler kısmında belirttiğimiz gibi, kullanışlı olmadığından, bunu bir yöntem olarak geliştirmeyeceğiz. Niceleme mantığında çıkarımların geçerlilik denetlemesini sekizinci ünitede ele alacağımız çözümleyici çizelge yöntemiyle gerçekleştireceğiz.

Kendimizi Sınayalım

1. $\forall x (Fx \rightarrow \exists y (Gx \vee Gy))$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki açılımı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(Fa \rightarrow (Ga \vee Ga) \vee (Ga \vee Ga)) \wedge$
$(Fb \rightarrow ((Ga \vee Gb) \vee (Ga \vee Gb)))$

b. $(Fa \rightarrow (Ga \vee Ga) \vee (Ga \vee Gb)) \wedge$
$(Fb \rightarrow ((Gb \vee Ga) \vee (Gb \vee Gb)))$

c. $(Fa \rightarrow (Ga \vee Gb) \vee (Ga \vee Gb)) \wedge$
$(Fb \rightarrow ((Gb \vee Gb) \vee (Ga \vee Gb)))$

d. $(Fa \rightarrow (Ga \vee Gb) \vee (Ga \vee Gb)) \wedge$
$(Fb \rightarrow ((Gb \vee Gb) \vee (Gb \vee Gb)))$

e. $(Fa \rightarrow (Ga \vee Ga) \wedge (Ga \vee Gb)) \wedge$
$(Fb \rightarrow ((Gb \vee Ga) \wedge (Gb \vee Gb)))$

2. $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{a, b\}$, $G^M = \{b, c\}$, $A^M = a$, $B^M = b$, $C^M = c$, modelinde aşağıdaki önermelerden hangisi **yanlıştır?**

a. FA
b. FB
c. FC
d. GB
e. GC

3. Aşağıdakilerden hangisi, $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = ?$, $G^M = \{b, c\}$, $A^M = a$ modelinde $FA \leftrightarrow GA$ önermesinin doğru olması için gereklidir?

a. $a \in F^M$
b. $a \notin F^M$
c. $b \in F^M$
d. $b \notin F^M$
e. $c \in F^M$

4. Aşağıdaki önermelerden hangisi $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{a, b\}$, $G^M = \{b, c\}$, $A^M = a$, $B^M = c$, modelinde **yanlıştır?**

a. $\exists x \sim Fx$
b. $\exists x\, Fx$
c. $\forall x (Fx \leftrightarrow Gx)$
d. $\forall x (Fx \vee Gx)$
e. $\exists x (Fx \wedge Gx)$

5. Aşağıdaki önermelerden hangisi $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a, b\}$, $A^M = a$ modelinde doğrudur?

a. $\forall x \sim Fx$
b. $\exists x \sim Fx$
c. $\sim FA$
d. $\forall x\, Fx$
e. $\exists x (Fx \rightarrow \sim FA)$

6. Aşağıdaki önermelerden hangisi $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{a, b\}$, $A^M = a$ modelinde doğrudur?

a. $\forall x \sim Fx$
b. $\forall x\, Fx$
c. $\exists y (\sim FA \wedge Fy)$
d. $\exists y (FA \wedge \sim Fy)$
e. $\sim FA \wedge \exists y\, Fy$

7. Aşağıdaki önermelerden hangisi $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $A^M = b$ modelinde **yanlıştır?**

a. $\exists x \sim Fx$
b. $\exists x\, Fx$
c. $\exists x (Fx \rightarrow FA)$
d. $\forall x (Fx \vee \sim FA)$
e. $\forall x (Fx \rightarrow FA)$

8. Aşağıdaki önermelerden hangisi $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{b\}$, $A^M = a$ modelinde **yanlıştır?**

a. $\exists x \sim Fx$
b. $\exists x\, Fx$
c. $\exists x (Fx \rightarrow FA)$
d. $\forall x (Fx \vee \sim FA)$
e. $\forall x (Fx \rightarrow FA)$

9. Aşağıdaki modellerin hangisi $\exists x\, Fx \therefore \forall x (Fx \wedge FA)$ çıkarımının bir karşı-modelidir?

a. $S_M = \{a\}$, $F = \{\ \}$, $A = a$
b. $S_M = \{a, b\}$, $F = \{\ \}$, $A = a$
c. $S_M = \{a, b\}$, $F = \{a\}$, $A = a$
d. $S_M = \{a, b\}$, $F = \{a, b\}$, $A = a$
e. $S_M = \{a, b\}$, $F = \{a, b\}$, $A = b$

10. Aşağıdaki modellerin hangisi $\exists x\, Fx \therefore \exists x (Fx \wedge FA)$ çıkarımının bir karşı-modelidir?

a. $S_M = \{a\}$, $F = \{\ \}$, $A = a$
b. $S_M = \{a, b\}$, $F = \{\ \}$, $A = a$
c. $S_M = \{a, b\}$, $F = \{a\}$, $A = a$
d. $S_M = \{a, b\}$, $F = \{b\}$, $A = b$
e. $S_M = \{a, b\}$, $F = \{a\}$, $A = b$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Önermeler” konusuna bakınız.
2. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Önermeler” konusuna bakınız.
3. b	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Önermeler” konusuna bakınız.
4. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Önermeler” konusuna bakınız.
5. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Önermeler” konusuna bakınız.
6. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Önermeler” konusuna bakınız.
7. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Önermeler” konusuna bakınız.
8. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Önermeler” konusuna bakınız.
9. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Çıkarımlar” konusuna bakınız.
10. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Modeller ve Nicelemeli Çıkarımlar” konusuna bakınız.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

$\exists x(Fx \rightarrow \forall y(Gy \wedge GA))$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki açılımını oluşturmak için, önce $\exists x$ nicelemesini eleyelim. Bu durumda

$$(Fa \rightarrow \forall y(Gy \wedge GA)) \vee (Fb \rightarrow \forall y(Gy \wedge GA))$$

ifadesi elde edilir. Şimdi $\forall$y nicelemelerini de elersek,

$$(Fa \rightarrow ((Ga \wedge GA) \wedge (Gb \wedge GA))) \vee$$
$$(Fb \rightarrow ((Ga \wedge GA) \wedge (Gb \wedge GA)))$$

ifadesi elde edilir.

Sıra Sizde 2

$S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a, b\}$, $A^M = a$ modelinde bize verilen önermelerin doğruluk değerini hesaplayalım:

(a) $(FA \rightarrow GA) \rightarrow (\exists x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx)$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki doğrusal açılımı.

$$(FA \rightarrow GA) \rightarrow ((Fa \vee Fb) \rightarrow (Ga \vee Gb))$$

ifadesidir. Ad sembolünün karşılığını yerine koyarsak

$$(Fa \rightarrow Ga) \rightarrow ((Fa \vee Fb) \rightarrow (Ga \vee Gb))$$

ifadesini elde ederiz. Modele göre, *Fa:* **D**, *Fb:* **Y**, *Ga:* **D**, *Gb:* **D** olur. Bu değerleri yerine koyarsak, $(\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}) \rightarrow ((\mathbf{D} \vee \mathbf{Y}) \rightarrow (\mathbf{D} \vee \mathbf{D}))$ ifadesini elde ederiz. Kolayca hesaplanabileceği gibi, bu ifade ***D*** doğruluk değerini alır. Dolayısıyla, $(FA \rightarrow GA) \rightarrow (\exists x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx)$ önermesi bu modelde doğrudur.

(b) $\exists x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x\, Gx \rightarrow \forall x\, Fx)$ önermesinin $\{a, b\}$ kümesindeki açılımı

$$((Fa \rightarrow Ga) \vee (Fb \rightarrow Gb)) \rightarrow ((Ga \vee Gb) \rightarrow (Fa \wedge Fb))$$

ifadesidir. Ad sembolü olmadığından, hemen doğruluk değerlerini yerine koyarak elde edeceğimiz $((\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}) \vee (\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{D})) \rightarrow ((\mathbf{D} \vee \mathbf{D}) \rightarrow (\mathbf{D} \wedge \mathbf{Y}))$ ifadesi **Y** değerini alır.

Sıra Sizde 3

$\exists x \exists y(Fx \wedge Gy) \therefore \forall x \exists y(Fx \wedge Gy)$ çıkarımını $\{a, b\}$ kümesinde açalım.

$\exists x \exists y(Fx \wedge Gy)$ öncülünden, önce $\exists x$ tikel-nicelemesini elersek,

$$\exists y(Fa \wedge Gy) \vee \exists y(Fb \wedge Gy)$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi, $\exists y$ nicelemesini eleyerek

$$((Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)) \vee ((Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$$

elde edilir. $\forall x \exists y(Fx \wedge Gy)$ sonuç önermesinden $\forall x$ nicelemesini elersek

$$\exists y(Fa \wedge Gy) \wedge \exists y(Fb \wedge Gy)$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi, bu ifadeden $\exists$y tikel-nicelemelerini eleyerek

$$((Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)) \wedge ((Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$$

elde edilir.

Şimdi, $\exists x \exists y(Fx \wedge Gy) \therefore \forall x \exists y(Fx \wedge Gy)$ çıkarımının *{a, b}* kümesindeki açılımı olarak elde ettiğimiz

$$((Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)) \vee ((Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$$
$$\therefore ((Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)) \wedge ((Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$$

ifadesinin öncülünü doğru, sonucunu yanlış yapacak bir model kurmaya çalışalım:

Öncülü doğru yapmak için $a \in F^M$, $a \in G^M$ kabul etmek yeterlidir. Çünkü bu durumda $(Fa \wedge Ga)$ doğru olur ve dolayısıyla $((Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)) \vee ((Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$ ifadesi de doğru olur. Şimdi, $b \notin F^M$ olduğunu kabul edersek, Fb yanlış olacağından, hem $(Fb \wedge Ga)$ hem de $(Fb \wedge Gb)$ yanlış olur ve dolayısıyla sonuç ifadesi olan $((Fa \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)) \wedge ((Fb \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$ ifadesi kuracağımız modelde yanlış olur.

Buna göre, $\exists x \exists y (Fx \wedge Gy) \therefore \forall x \exists y (Fx \wedge Gy)$ çıkarımı için iki elemanlı bir karşı-modeli aşağıdaki gibi oluşturabiliriz:

$$S_M = \{a, b\},\ F^M = \{a\},\ G^M = \{a\}.$$

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. (2000). **Sembolik Mantık El Kitabı.** (3 cilt). Ankara: METU Press.

Grünberg, T. ve Onart, A. vd. (2003). **Mantık Terimleri Sözlüğü.** Ankara: METU Press.

Kalish, D., Montague R., Mar, G. (1980) **Logic: Techniques of Formal Reasoning.** 2. Baskı. New York: Oxford University Press.

Ural, Ş. (1995). **Temel Mantık.** İstanbul: Çantay Kitabevi.

Yıldırım, C. (1976). **100 Soruda Mantık.** İstanbul: Gerçek Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999). **Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi.** İstanbul: Bilgi Yayınevi.

SEMBOLİK MANTIK

7

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

Gündelik dildeki nicelemeli önermeleri ve çıkarımları niceleme mantığında sembolleştirebilecek,

Nicelemeli sembolik önerme ve çıkarımları gündelik dile çevirebileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Sembolleştirme
- Sembolleştirme anahtarı
- Kategorik önerme
- Çeviri
- Çeviri anahtarı

İçerik Haritası

Sembolik Mantık

Niceleme Mantığında Sembolleştirme ve Çeviri

- GİRİŞ
- SEMBOLLEŞTİRME
- GÜNDELİK DİLE ÇEVİRİ

Niceleme Mantığında Sembolleştirme ve Çeviri

GİRİŞ

Üçüncü ünitede, gündelik dildeki önerme ve çıkarımların önermeler mantığında sembolleştirilmesi ve önermeler mantığının sembolik dilindeki önermelerin gündelik dile çevrilmesi konularını ele almıştık. Beşinci ünitede ise, önermeler mantığının gündelik dildeki kimi önerme ve çıkarımların uygun biçimde denetlenmesi için yeterli olmadığını, nicelemeli çıkarım örnekleri ile göstermiştik. Niceleme mantığının sembolik dili, gündelik dildeki tümel ve tikel-niceleme ifadelerini de temsil ederek, gündelik dildeki akıl yürütmelerimizi daha güçlü biçimde denetleyebilmemizi sağlar. Bu ünitede, içinde niceleme ifadeleri bulunan gündelik dil önerme ve çıkarımlarını niceleme mantığında sembolleştirme ve niceleme mantığının sembolik önermelerinin gündelik dil önermelerine çevirisi konusunu ele alacağız. Bu sayede, nicelemeli gündelik dil çıkarımlarını niceleme mantığında denetleyebileceğiz.

SEMBOLLEŞTİRME

Bir önceki ünitede "model" kavramını ele almış ve nicelemeli önermelerin modelde doğruluğuna-yanlışlığına nasıl karar verebileceğimizi görmüştük. Buna göre, en az bir modelde doğru olan bir nicelemeli önerme tutarlı, en az bir modelde yanlış olan bir önerme geçersiz, en az bir modelde doğru ve en az bir modelde yanlış olan (yani tutarlı ama geçersiz) bir önerme olumsal, tüm modellerde doğru olan bir önerme geçerlidir. Çıkarımlara gelince, en az bir modelde tüm öncülleri doğru ama sonuç önermesi yanlış olan bir çıkarım geçersiz, öncüllerinin tümünün doğru olduğu her modelde sonuç önermesi de doğru olan bir çıkarım ise geçerlidir.

Gündelik dildeki bir önerme veya çıkarımı niceleme mantığında denetlemek, bu önerme veya çıkarımın semantik statüsünü (geçerlilik, geçersizlik, tutarlılık, olumsallık durumunu) niceleme mantığı bakımından ortaya koymak demektir. Bu denetlemeyi doğru biçimde yapmamız, gündelik dildeki nicelemeli bir önermeyi niceleme mantığında doğru olarak sembolleştirmemize yani, bu gündelik dil önermesinin niceleme mantığının dilindeki doğru sembolik karşılığını bulmamıza bağlıdır.

Gündelik dildeki nicelemeli bir önermenin, niceleme mantığının dilindeki sembolik karşılığını oluşturduğumuzda, bu gündelik dil önermesini sembolleştirdiğimizi söyleriz.

Nicelemeli önermelerin sembolleştirilmesinde temel adım, geleneksel mantıkta (Aristoteles mantığı) "kategorik önermeler" olarak adlandırılan dört temel nicelemeli önerme biçiminin sembolleştirilmesidir. *F* ve *G*, "insan", "canlı" gibi, herhangi iki genel terim olmak üzere, kategorik önermeleri genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

- Her F G dir.
- Hiçbir F G değildir.
- Bazı F ler G dir.
- Bazı F ler G değildir.

“Her F G dir” önermesi, $\forall x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ biçiminde sembolleştirilir.

“Her F G dir” önermesi, “Her şey, eğer F ise G dir” ya da, daha açık bir ifade ile, “Her şey için, eğer o şey bir F ise, o şey bir G dir” biçiminde yorumlanarak, $\forall x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ biçiminde sembolleştirilir. “Her F G dir” önermesinin $\forall x$ $(Fx \wedge Gx)$ biçiminde sembolleştirilmesi yanlış olurdu: $\forall x$ $(Fx \wedge Gx)$ önermesi bir modelde yorumlandığında, o modeldeki her nesnenin hem F hem G olduğunu ifade eder. Hakikaten, $S = \{a, b, c, ...\}$ ise, bu kümede $\forall x$ $(Fx \wedge Gx)$ önermesinin açılımı, $(Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Gb) \wedge (Fc \wedge Gc) \wedge ...$ olurdu. Ancak, “Her F G dir” önermesi, bu biçimde yorumlanamaz. Örneğin, “Her insan ölümlüdür” önermesini düşünelim: Bu önermeyi F yüklemini “insandır”, G yüklemini de “ölümlüdür” kabul ederek, $\forall x$ $(Fx \wedge Gx)$ biçiminde sembolleştirsek, “Her şey, hem insandır hem de ölümlüdür” ile, “Her şey, eğer insan ise ölümlüdür” önermelerini aynı şekilde sembolleştirmiş olurduk. Oysa “Her insan ölümlüdür” doğru bir önerme iken, “Her şey hem insan hem de ölümlüdür” önermesi yanlıştır.

“Hiçbir F G değildir” önermesi, $\forall x$ $(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$ biçiminde sembolleştirilir.

“Hiçbir F G değildir” önermesi, “Her şey, eğer F ise G değildir” ya da, daha açık bir ifade ile, “Her şey için, eğer o şey bir F ise, o şey bir G değildir” biçiminde yorumlanarak, $\forall x$ $(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$ biçiminde sembolleştirilir. Bir önceki paragraftaki açıklamaya göre, “Hiçbir F G değildir” önermesinin $\forall x$ $(Fx \wedge {\sim}Gx)$ biçiminde sembolleştirilemeyeceği anlaşılabilir.

“Bazı F ler G dir” önermesi, $\exists x$ $(Fx \wedge Gx)$ biçiminde sembolleştirilir.

“Bazı F ler G dir” önermesi, “Bazı şeyler, hem F dir hem de G dir” ya da, daha açık bir ifade ile, “Bazı şeyler için, o şey hem bir F hem de bir G dir” biçiminde yorumlanır ve $\exists x$ $(Fx \wedge Gx)$ biçiminde sembolleştirilir. “Bazı F ler G dir” önermesini, “Bazı şeyler, eğer F ise G dir” biçiminde yorumlayıp $\exists x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ biçiminde sembolleştirmek yanlış olurdu. $\exists x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ önermesi, örneğin, en az bir nesnenin F özelliğine sahip olmadığı bir modelde yorumlandığında doğru olur: Bu önerme modelin evreni olan $\{a, b, c, ...\}$ kümesinde açıldığında, $(Fa \rightarrow Ga) \vee (Fb \rightarrow Gb) \vee (Fb \rightarrow Gb) \vee ...$ ifadesi elde edilir. Bu önerme tikel-evetlemelerden oluştuğundan, bir bileşenin doğru olması durumunda, tüm ifade doğru olur. Ön-bileşeni yanlış olan bir koşul önermesi doğru olduğundan, eğer bir eleman bile F özelliğini taşımasa, o elemana ait bileşen, dolayısıyla tüm ifade doğru olurdu. Örneğin, “Bazı insanlar dört-ayaklıdır” önermesini düşünelim. Bu önermeyi, F yüklemini “insandır”, G yüklemini de “dört-ayaklıdır” kabul ederek, $\exists x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ biçiminde sembolleştirdiğimizi varsayalım. $\exists x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ önermesinin doğru olması için, en az bir a nesnesi için $(Fa \rightarrow Ga)$ olması yeterlidir. Şimdi, a nesnesi elimdeki kalem olsun. Bu kalem $\exists x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ önermesini, dolayısıyla “Bazı insanlar dört-ayaklıdır” önermesini doğru yapmaya yeterdi! Çünkü elimdeki kalem, a, insan olmadığından, Fa yanlıştır. Dolayısıyla, $(Fa \rightarrow Ga)$ doğrudur. Bir tek nesnenin bile $(Fx \rightarrow Gx)$ formülünü sağlaması, $\exists x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ önermesinin doğru olması için yeterli olduğundan, $\exists x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ doğrudur. Oysa “Bazı insanlar dört-ayaklıdır” önermesi yanlıştır. Dolayısıyla, “Bazı insanlar dört-ayaklıdır” önermesi $\exists x$ $(Fx \rightarrow Gx)$ biçiminde sembolleştirilemez.

“Bazı F ler G değildir” önermesi $\exists x$ $(Fx \wedge {\sim}Gx)$ biçiminde sembolleştirilir.

“Bazı F ler G değildir” önermesi “Bazı şeyler, F dir ve G değildir” ya da, daha açık bir ifade ile, “Bazı şeyler için, o şey bir F dir ve bir G değildir” biçiminde yorumlanır ve $\exists x$ $(Fx \wedge {\sim}Gx)$ biçiminde sembolleştirilir. Bir önceki paragraftaki açıklamaya göre, “Bazı F ler G değildir” önermesinin $\exists x$ $(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$ biçiminde sembolleştirilemeyeceği anlaşılabilir.

Başvuruda kolaylık sağlaması amacıyla, dört kategorik önerme biçiminin sembolik karşılıklarını tekrarlayalım:

- Her *F G* dir: $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$
- Hiçbir *F G* değildir: $\forall x\,(Fx \rightarrow \sim Gx)$
- Bazı *F* ler *G* dir: $\exists x\,(Fx \wedge Gx)$
- Bazı *F* ler *G* değildir: $\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx)$

Bu dört kategorik önermenin sembolleştirmesinin, daha karmaşık gündelik dil önerme ve çıkarımlarının sembolleştirmesinde de faydalı olacağını göreceğiz. Üçüncü ünitede, önermeler mantığında sembolleştirme konusunu ele alırken yaptığımız gibi, hata yapmaktan kaçınmak için, niceleme mantığında da, Kalish-Montague (1980) sistemini izleyerek, sembolleştirme ve çeviriyi aşamalı olarak gerçekleştireceğiz.

Önermeler mantığında olduğu gibi, niceleme mantığında da sembolleştirme ancak bir sembolleştirme anahtarına göre yapılabilir. Önermeler mantığında, sembolleştirme anahtarı basit önermelerin önerme değişkenleri ile eşleştirilmesi ile belirtiliyordu. Niceleme mantığında ise, bir önerme için bir sembolleştirme anahtarı, bu önermede geçen yüklemlerin yüklem sembolleri ile, adların da ad sembolleri ile eşleştirilmesi ile belirtilir. Kullanacağımız yöntem bakımından, yüklemler yerine *a,b,...* değişkenleri yardımıyla, "yüklem ifadeleri" kullanacağız. Örneğin, "insandır" yüklemine ait bir yüklem ifadesi "*a* bir insandır" gündelik dil formülü, "sarıdır" yüklemine ait bir yüklem ifadesi "*b* sarıdır" gündelik dil formülüdür.

Niceleme mantığında sembolleştirme adların ve yüklemlerin sembolik karşılığını belirten sembolleştirme anahtarına göre gerçekleştirilir.

Bir gündelik dil önermesini, aşağıdaki adımları izleyerek sembolleştireceğiz:

1. adımda, gündelik dil önermesinde geçen tikel ve tümel-niceleme ifadelerinin ve önerme eklemlerinin eş anlamlıları, standart niceleme ifadeleriyle ve önerme eklemleri ile değiştirilerek, noktalama işaretlerine uygun olarak parantezler yerleştirilir. Önermeler mantığında olduğu gibi, bu işlem sonucunda elde edilen ifade gündelik dil önermesinin standart biçimidir.
2. adımda, niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri yerine niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerleştirilir.
3. adımda, "*x* bir insandır", "Ahmet bir öğrencidir" gibi, *X* bir değişken veya ad, ***Y*** bir yüklem ifadesi olmak üzere, *(X**Y**)* biçimindeki gündelik dil formülleri yerine, "{*a* bir insandır}*x*" ve "{*a* bir öğrencidir}Ahmet" ifadeleri gibi, {***Y***}*X* ifadesi konur.
4. adımda, parantezli yüklem ifadeleri yerine sembolleştirme anahtarında verilen yüklem sembolleri konur.
5. adımda, ifadede geçen adlar yerine ad sembolleri konur.
6. adımda, istenirse, kimi parantezler kurallara uygun olarak kaldırılabilir.

ÖRNEK

"Her insan hata yapabilir ancak kimi hatalar kolay affedilmez" önermesini

F: a bir insandır.
G: a hata yapabilir.
H: a bir hatadır.
K: a kolay affedilir.

sembolleştirme anahtarına göre, niceleme mantığında sembolleştirelim:

1. adımda, tikel ve tümel-niceleme ifadeleri ile önerme eklemlerinin eş anlamlıları standart niceleme ifadeleriyle ve önerme eklemleri ile değiştirilerek ve noktalama işaretlerine uygun olarak parantezler yerleştirilerek,

Her *x* (*x* bir insandır ise *x* hata yapabilir) ve bazı *y* (*y* bir hatadır ve değildir *y* kolay affedilir.)

ifadesi, önermenin standart biçimi olarak elde edilir.

2. adımda, niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri yerine niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerleştirilerek

   $\forall x$ (x bir insandır $\rightarrow$ x hata yapabilir) $\wedge$ $\exists y$ (y bir hatadır $\wedge$ ~y kolay affedilir)

3. adımda, parantezli yüklem ifadelerinin uygulandıkları değişkenle birlikte konulmasıyla

   $\forall x$ ({a bir insandır}x $\rightarrow$ {a hata yapabilir}x) $\wedge$ $\exists y$ ({a bir hatadır}y $\wedge$ {a kolay affedilir}y)

   ifadesi elde edilir.

4. adımda, parantezli yüklem ifadeleri yerine sembolleştirme anahtarında bunların karşılığı olarak verilen yüklem sembolleri konarak

   $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \wedge \exists y\,(Hy \wedge {\sim}Ky)$

   önermesi elde edilir.

5. adımda, önermede geçen hiçbir ad olmadığından, yine

   $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \wedge \exists y\,(Hy \wedge {\sim}Ky)$

   önermesi elde edilir.

6. adımda, kurallara göre hiçbir parantez elenemeyeceğinden, yine aynı önerme elde edilir.

Dolayısıyla, “Her insan hata yapabilir ancak kimi hatalar kolay affedilmez” önermesinin verilen sembolleştirme anahtarına göre niceleme mantığındaki sembolik karşılığı $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \wedge \exists y\,(Hy \wedge {\sim}Ky)$ sembolik önermesidir.

ÖRNEK

“2 den büyük tüm asal sayılar tek sayıdır” önermesini

F: a 2 den büyüktür.
G: a asal sayıdır.
H: a tek sayıdır.

sembolleştirme anahtarına göre, niceleme mantığında sembolleştirelim:

1. adımda, tikel ve tümel-niceleme ifadeleri ile önerme eklemlerinin eş anlamlılarını standart niceleme ifadeleriyle ve önerme eklemleri ile değiştirerek ve noktalama işaretlerine uygun olarak parantezler yerleştirerek,

   Her *x* ((*x* 2 den büyüktür ve *x* asal sayıdır) ise *x* tek sayıdır)

   ifadesini elde ederiz.

2. adımda, niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri yerine niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerleştirilerek

   $\forall x$ ((x 2 den büyüktür $\wedge$ x asal sayıdır) $\rightarrow$ x tek sayıdır

3. adımda, parantezli yüklem ifadelerinin uygulandıkları değişkenle birlikte konulmasıyla

   $\forall x$ (({a 2 den büyüktür}x $\wedge$ {a asal sayıdır}x) $\rightarrow$ {a tek sayıdır}x)

   ifadesi elde edilir.

4. adımda, parantezli yüklem ifadeleri yerine sembolleştirme anahtarında bunların karşılığı olarak verilen yüklem sembolleri konarak

   $\forall x\,((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx)$

   ifadesi elde edilir.
5. adımda, ad yerine konması gereken bir ad sembolü olmadığından yine aynı sembolik önerme elde edilir.
6. adımda, kurallara göre tümel-evetlemenin koşul eklemine göre işlem önceliği olduğundan, tümel-evetlemeye ait parantez kaldırılarak

   $\forall x\,(Fx \wedge Gx \rightarrow Hx)$

   önermesi elde edilir.

Önermeler mantığından bildiğiniz gibi, bir çıkarımın sembolleştirilmesi, çıkarımdaki tüm önermelerin sembolleştirilmesi ve sonuç önermesini bildiren “o halde” ve benzeri ifade yerine, $\therefore$ sembolünün konulmasından ibarettir.

ÖRNEK

“Her canlı üremiştir. O halde, hiçbir canlı ilk canlı değildir” çıkarımını aşağıdaki sembolleştirme anahtarına göre sembolleştirelim:

F: a ilktir.
G: a canlıdır.
H: a üremiştir.

Temel bir kategorik önerme olan öncül önermesinin sembolleştirmesi, bildiğiniz gibi, $\forall x\,(Gx \rightarrow Hx)$ sembolik önermesidir. O halde, sonuç önermesini sembolleştirmeye geçebiliriz:

1. adımda, tikel ve tümel-niceleme ifadeleri ile önerme eklemlerinin eş anlamlılarını standart niceleme ifadeleriyle ve önerme eklemleri ile değiştirerek ve noktalama işaretlerine uygun olarak parantezler yerleştirerek,

   Her x ((x canlıdır ise değildir (x ilktir ve x canlıdır))

   ifadesini elde ederiz.
2. adımda, niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri yerine niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerleştirerek

   $\forall x$ ((x canlıdır ($\rightarrow$ ~(x ilktir $\wedge$ x canlıdır))

   ifadesini elde ederiz.
3. adımda, yüklemler yerine küme parantezli yüklem ifadelerini ve uygulandıkları değişkenleri koyarak

   $\forall x\,((\{\text{a canlıdır}\}x \rightarrow \sim(\{\text{a ilktir}\}x \wedge \{\text{a canlıdır}\}x))$

   ifadesini elde ederiz.
4. adımda, parantezli yüklem ifadeleri yerine sembolleştirme anahtarında verilen karşılıkları konarak,

   $\forall x\,((Gx \rightarrow \sim(Fx \wedge Gx))$

   sembolik önermesi elde edilir.
5. adımda, önermede hiçbir ad geçmediğinden, yine aynı önerme elde edilir.
6. adımda, kurallara göre hiçbir parantez elenemeyeceğinden, yine

   $\forall x\,((Gx \rightarrow \sim(Fx \wedge Gx))$

   önermesi elde edilir.

Dolayısıyla, “Her canlı üremiştir. O halde, hiçbir canlı ilk canlı değildir” çıkarımının, bize verilen sembolleştirme anahtarına göre, niceleme mantığının dilindeki sembolik karşılığı

$$\forall x\,(Gx \rightarrow Hx) \;\therefore\; \forall x\,((Gx \rightarrow {\sim}(Fx \wedge Gx))$$

sembolik çıkarımıdır.

ÖRNEK

“Bazı başarılı öğrenciler, arkadaşları tarafından sevilmeyen öğrencilerdir. Çünkü Ahmet başarılı ama, arkadaşları tarafından sevilmeyen bir öğrencidir” çıkarımını aşağıdaki sembolleştirme anahtarına göre sembolleştirelim:

F: a başarılıdır.
G: a öğrencidir.
H: a arkadaşları tarafından sevilir.
A: Ahmet

Sembolleştireceğimiz “Bazı başarılı öğrenciler, arkadaşları tarafından sevilmeyen öğrencilerdir. Çünkü Ahmet başarılı ama arkadaşları tarafından sevilmeyen bir öğrencidir” çıkarımının öncülü “Ahmet başarılı ama arkadaşları tarafından sevilmeyen bir öğrencidir” önermesi, sonucu da “Bazı başarılı öğrenciler, arkadaşları tarafından sevilmeyen öğrencilerdir” önermesidir. İlk ünitede çıkarımları ele alırken belirttiğimiz gibi, öncül yani, sonuca dayanak oluşturan önerme, bazen sonuçtan sonra belirtilir.

“Ahmet başarılı ama arkadaşları tarafından sevilmeyen bir öğrencidir” önermesinde hiçbir niceleme ifadesi geçmemektedir. Buna rağmen, önerme bu kısımda edindiğimiz yönteme göre sembolleştirilebilir:

1. adımda, tikel ve tümel-niceleme ifadeleri ile önerme eklemlerinin eş anlamlılarını standart niceleme ifadeleriyle ve önerme eklemleri ile değiştirmemiz ve noktalama işaretlerine uygun olarak parantezler yerleştirmemiz gerekmektedir. Önermede hiçbir niceleme ifadesi geçmediğinden, sadece “ama” ifadesi yerine, standart karşılığı olan “ve” önerme eklemini koyarak ve “arkadaşları tarafından sevilmeyen” tümceciğini tümel-evetleme ile ekleyerek,

   Ahmet başarılıdır ve (değildir Ahmet arkadaşları tarafından sevilir ve Ahmet bir öğrencidir)

   ifadesi elde edilir.
2. adımda, niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri yerine niceleyicileri ve önerme eklemi sembollerini yerleştirmemiz gerekmektedir. Hiçbir niceleme ifadesi geçmediğinden, sadece önerme eklemleri yerine önerme eklemi sembollerini koyarak,

   Ahmet başarılıdır ∧ (~ Ahmet arkadaşları tarafından sevilir ∧ Ahmet bir öğrencidir)

   ifadesini elde ederiz.
3. adımda, yüklemler yerine küme parantezli yüklem ifadelerini ve uygulandıkları ad sembolünü koyarak,

   {*a* başarılıdır} Ahmet ∧ (~{*a* arkadaşları tarafından sevilir} Ahmet ∧ {*a* bir öğrencidir} Ahmet)

   ifadesini elde ederiz.

4. adımda, yüklem ifadeleri yerine sembolleştirme anahtarındaki karşılıkları olan yüklem sembollerini koyarak,

   $F\,\text{Ahmet} \wedge (\sim H\,\text{Ahmet} \wedge G\,\text{Ahmet})$

   ifadesini elde ederiz.
5. adımda, “Ahmet” adı yerine, sembolleştirme anahtarında verilen “*A*” sembolünü koyarak,

   $FA \wedge (\sim HA \wedge GA)$

   önermesini elde ederiz.
6. adımda, kurallara göre hiçbir parantez elenemeyeceğinden, yine

   $FA \wedge (\sim HA \wedge GA)$

   önermesini elde ederiz.

SIRA SİZDE 1

“Eğer her zengin insan mutlu ise, Ahmet mutludur” önermesini niceleme mantığında, verilen sembolleştirme anahtarına göre sembolleştiriniz.

F: a zengindir.
G: a insandır.
H: a mutludur.
A: Ahmet

SIRA SİZDE 2

“Her satranç oyunu ya berabere ya da matla biter” önermesini niceleme mantığında, verilen sembolleştirme anahtarına göre sembolleştiriniz.

F: a bir satranç oyunudur.
G: a berabere biter.
H: a matla biter.

Nicelemeli bir gündelik dil önermesinin niceleme mantığı bakımından denetlenmesi, bu önermenin sembolleştirilmesinin niceleme mantığında denetlenmesi demektir. Önermenin sembolleştirilmesinin niceleme mantığına göre geçerli, tutarlı, olumsal, çelişme olmasına göre, gündelik dil önermesi niceleme mantığı bakımından geçerli, tutarlı, olumsal ya da çelişme olur. Nicelemeli bir gündelik dil çıkarımının niceleme mantığı bakımından denetlenmesi, bu çıkarımın sembolleştirmesinin niceleme mantığında denetlenmesi demektir. Çıkarımın sembolleştirmesinin niceleme mantığına göre geçerli veya geçersiz çelişme olmasına göre, gündelik dil çıkarımı niceleme mantığı bakımından geçerli veya geçersizdir.

GÜNDELİK DİLE ÇEVİRİ

Nicelemeli bir sembolik önermenin gündelik dildeki karşılığını oluşturduğumuzda, bu sembolik önermeyi gündelik dile çevirdiğimizi söyleriz. Gündelik dile çevirme işlemini de, sembolleştirmede olduğu gibi adım adım gerçekleştireceğiz.

Önermeler mantığında olduğu gibi, niceleme mantığında da gündelik dile çeviri ancak bir çeviri anahtarına göre yapılabilir. Niceleme mantığında, sembolik bir önerme için bir çeviri anahtarı, bu önermede geçen yüklem sembollerinin yüklem ifadeleri ile, ad sembollerinin ise adlar ile eşleştirilmesi ile belirtilir.

Niceleme mantığında gündelik dile çeviri, ad ve yüklem sembollerinin gündelik dildeki karşılığını belirten çeviri anahtarına göre gerçekleştirilir.

Gündelik dile çevirme işlemi, sembolleştirme işleminin tersi olduğundan, sembolik bir önermeyi gündelik dile çevirirken, sembolleştirmede izlediğimiz adımları tersine çeviririz. Gündelik dile çeviri adımlarını açıkça sıralayalım:

1. adımda, en dıştaki parantezler hariç, okuma kolaylığı sağlamak için kaldırılmış olan parantezler eklenir.
2. adımda, ad sembolleri yerine, sembolleştirme anahtarında verilen adlar konur.
3. adımda, ifadede geçen her yüklem sembolü yerine, sembolleştirme anahtarında verilen yüklem ifadesi küme parantezleri içine konur. Hemen yanına yüklemin uygulandığı değişken veya ad konur.
4. adımda, önermede geçen $\{\boldsymbol{Y}(a)\}X$ ifadeleri yerine, $\boldsymbol{Y}(a)$ yüklem ifadesinde a yerine X değişken veya ad sembolünün konmasıyla elde edilen $\boldsymbol{Y}(X)$ ifadesi konur.
5. adımda, niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerine gündelik dildeki niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri konur.
6. adımda, doğal bir ifade elde etmek için parantezler yerine noktalama işaretleri konur ve istenirse kimi niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri eşanlamlı başka ifadelerle değiştirilir.

ÖRNEK

$\exists x\, ((Fx \wedge Gx) \wedge Hx)$ sembolik önermesini aşağıda verilen çeviri anahtarına göre gündelik dile çevirelim:

F: a İlkçağda yaşamıştır.
G: a filozoftur.
H: a Anadolu'ludur.

1. adımda, verilen sembolik önermede, okuma kolaylığı sağlamak için kaldırılmış parantez olmadığından bu adımda yine $\exists x\, ((Fx \wedge Gx) \wedge Hx)$ önermesi elde edilir.
2. adımda, önermede ad sembolü olmadığından, bu adımda yapılması gereken bir şey yoktur.
3. adımda, yüklem sembolleri yerine, sembolleştirme anahtarında verilen yüklem ifadelerini küme parantezleri içine koyarak ve bu ifadelerin yanına yüklemin uygulandığı değişkenleri koyarak,

   $\exists x$ (({a ilkçağda yaşamıştır}x ∧ {a filozoftur}x) ∧ {a Anadolu'ludur}x)

   ifadesini elde ederiz.
4. adımda, önermede geçen $\{\boldsymbol{Y}(a)\}X$ ifadeleri yerine, $\boldsymbol{Y}(a)$ yüklem ifadesinde a yerine X değişken veya ad sembolünün konmasıyla elde edilen $\boldsymbol{Y}$(X) ifadesini koyarak,

   $\exists x$ ((x ilkçağda yaşamıştır ∧ x filozoftur) ∧ x Anadolu'ludur)

   ifadesini elde ederiz.
5. adımda, niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerine niceleme ifadelerini ve önerme eklemlerini koyarak,

   Bazı x ((x ilkçağda yaşamıştır ve x filozoftur) ve x Anadolu'ludur)

   ifadesini elde ederiz.
6. adımda, doğal bir ifade elde etmek için parantezler yerine noktalama işaretleri koyarak ve niceleme ifadesini ve önerme eklemlerini eşanlamlı başka ifadelerle değiştirerek,

   İlkçağda yaşamış bazı filozoflar Anadolu'ludur

   gündelik dil önermesini elde ederiz.

ÖRNEK

$\forall x\ (Gx \leftrightarrow Fx \vee Hx)$ sembolik önermesini aşağıda verilen çeviri anahtarına göre gündelik dile çevirelim:

F: a bir köpektir.
G: a'nın kuyruğu vardır.
H: a kedidir.

1. adımda, verilen sembolik önermede, $(Fx \vee Hx)$ tikel-evetleme önermesinin parantezleri, okuma kolaylığı sağlamak için kaldırılmıştır. Bu parantezleri ekleyerek,

   $\exists x\, (Gx \leftrightarrow (Fx \vee Hx))$

   önermesini elde ederiz.
2. adımda, önermede ad sembolü olmadığından, bu adımda yapılması gereken bir şey yoktur.
3. adımda, yüklem sembolleri yerine, sembolleştirme anahtarında verilen yüklem ifadelerini küme parantezleri içine koyarak ve bu ifadelerin yanına yüklemin uygulandığı değişkenleri koyarak,

   $\forall x$ ({a'nın kuyruğu vardır}$x \leftrightarrow$ ({a bir köpektir}$x \vee$ {a bir kedidir}x))

   ifadesini elde ederiz.
4. adımda, önermede geçen $\{\boldsymbol{Y}(a)\}X$ ifadeleri yerine, $\boldsymbol{Y}(a)$ yüklem ifadesinde a yerine X değişken veya ad sembolünün konmasıyla elde edilen $\boldsymbol{Y}(X)$ ifadesini koyarak,

   $\forall x$ (x'in kuyruğu vardır $\leftrightarrow$ (x bir köpektir $\vee$ x bir kedidir))

   ifadesini elde ederiz.
5. adımda, niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerine niceleme ifadelerini ve önerme eklemlerini koyarak,

   Her x (x'in kuyruğu vardır ancak ve ancak (x bir köpektir veya x bir kedidir))

   ifadesini elde ederiz.
6. adımda, doğal bir ifade elde etmek için parantezler yerine noktalama işaretleri koyarak ve niceleme ifadesini ve önerme eklemlerini eşanlamlı başka ifadelerle değiştirerek,

   Bir şeyin kuyruğu vardır ancak ve ancak, o şey ya bir köpek veya bir kedidir.

   ifadesini elde ederiz.

ÖRNEK

$FA \rightarrow \exists x\ (Fx \wedge Gx)$ sembolik önermesini aşağıda verilen çeviri anahtarına göre gündelik dile çevirelim:

F: a asal sayıdır.
G: a çift sayıdır.
A: 2

1. adımda, verilen sembolik önermede, okuma kolaylığı sağlamak için kaldırılmış parantez olmadığından, bu adımda yine $FA \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesini elde ederiz.
2. adımda, "A" ad sembolü yerine, sembolleştirme anahtarında verilen karşılığını koyarak

   $F\,2 \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx)$

   ifadesini elde ederiz.

3. adımda, yüklem sembolleri yerine, sembolleştirme anahtarında verilen yüklem ifadelerini küme parantezleri içine koyarak ve bu ifadelerin yanına yüklemin uygulandığı değişkenleri koyarak,

   $\{a \text{ asal sayıdır}\}\ 2 \rightarrow \exists x\, (\{a \text{ asal sayıdır}\}x \wedge \{a \text{ çift sayıdır}\}x)$

   ifadesini elde ederiz.
4. adımda, önermede geçen $\{\boldsymbol{Y}(a)\}X$ ifadeleri yerine, $\boldsymbol{Y}(a)$ yüklem ifadesinde a yerine X değişken veya ad sembolünün konmasıyla elde edilen $\boldsymbol{Y}(X)$ ifadesini koyarak,

   $2 \text{ asal sayıdır} \rightarrow \exists x\, (x \text{ asal sayıdır} \wedge x \text{ çift sayıdır})$

   ifadesini elde ederiz.
5. adımda niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerine niceleme ifadelerini ve önerme eklemlerini koyarak,

   2 asal sayıdır ise, bazı *x* (*x* asal sayıdır ve *x* çift sayıdır)

   ifadesini elde ederiz.
6. adımda, doğal bir ifade elde etmek için parantezler yerine noktalama işaretleri koyarak ve niceleme ifadesini ve önerme eklemlerini eşanlamlı başka ifadelerle değiştirerek,

   2 asal sayı ise, bazı asal sayılar çift sayıdır.

   gündelik dil önermesini elde ederiz.

SIRA SİZDE 3

$\forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, (Hy \wedge Gy))$ sembolik önermesini verilen çeviri anahtarına göre gündelik dile çeviriniz:

F: a roman okurudur
G: a romandır
H: a iyidir

Önermeler mantığında olduğu gibi, gündelik dile çeviri ile bir sembolik önerme veya çıkarımın semantik statüsü hakkında bilgi edinebiliriz. Eğer bir sembolik önermenin gündelik dile bir çeviri anahtarına göre çevirisi yanlış bir gündelik dil önermesi ise, bu sembolik önerme geçersizdir. Eğer bir sembolik önermenin gündelik dile bir çeviri anahtarına göre çevirisi doğru bir gündelik dil önermesi ise, bu sembolik önerme tutarlıdır. Bir sembolik çıkarımın bir çeviri anahtarına göre gündelik dile çevirisi olan çıkarımın öncülleri doğru ancak sonucu yanlış ise, bu sembolik çıkarım geçersizdir. Sembolik bir çıkarımı geçerli bir gündelik dil çıkarımına çevirmekle, o sembolik çıkarımın geçerli olduğu sonucuna varamayız. Çünkü sembolik çıkarımın gündelik dile başka bir gündelik dil çıkarımı olarak çevirisi, gündelik dilde geçersiz bir çıkarım olabilir. Bu nedenle bu yöntem sadece bir sembolik çıkarımın geçersiz olduğunu görmek ve göstermek için kullanılabilir.

ÖRNEK

$\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx \therefore \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ sembolik çıkarımının

F: a bitkidir
G: a insandır

çeviri anahtarına göre gündelik dile çevirisi: "Bazı şeyler bitkidir ve bazı şeyler insandır. O halde, bazı insanlar bitkidir." gündelik dil çıkarımıdır. Bu çıkarım, öncülleri doğru, sonuç önermesi yanlış olduğundan, gündelik dilde geçersiz bir çıkarımdır. Dolayısıyla, geçersiz bir gündelik dil çıkarımına dönüştürülebilmesinden dolayı, $\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx \therefore \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ sembolik çıkarımı niceleme mantığında geçersiz bir sembolik çıkarımdır.

Özet

Gündelik dildeki nicelemeli önermeleri ve çıkarımları niceleme mantığında sembolleştirebilmek,

Gündelik dildeki nicelemeli bir önermenin, niceleme mantığının sembolik dilinde ifade eden bir sembolik önerme oluşturduğumuzda, bu gündelik dil önermesini sembolleştirdiğimizi söyleriz. Çıkarımlar da önermelerden oluştuğundan, nicelemeli önermeleri sembolleştirebiliyorsak, nicelemeli çıkarımları da sembolleştirebiliriz. Nicelemeli bir çıkarımın sembolleştirilmesi, çıkarımı oluşturan tüm önermelerin sembolleştirilmesi ve öncüllerle sonuç arasına ∴ çıkarım sembolünün konması demektir.

Önermeler mantığında olduğu gibi, niceleme mantığında da sembolleştirme ancak bir sembolleştirme anahtarına göre yapılabilir. Önermeler mantığında, sembolleştirme anahtarı basit önermelerin önerme değişkenleri ile eşleştirilmesi ile belirtiliyordu. Niceleme mantığında ise, bir önerme için bir sembolleştirme anahtarı, bu önermede geçen yüklemlerin yüklem sembolleri ile, adların da ad sembolleri ile eşleştirilmesi ile belirtilir. Kullanacağımız yöntem bakımından, yüklemler yerine *a*,*b*,... değişkenleri yardımıyla, "yüklem ifadeleri" kullanacağız. Örneğin, "insandır" yüklemine ait bir yüklem ifadesi "*a* bir insandır" gündelik dil formülü, "sarıdır" yüklemine ait bir yüklem ifadesi "*b* sarıdır" gündelik dil formülüdür.

Gündelik dilde ifade edilmiş bir önermeyi niceleme mantığında sembolleştirme adımlarını sıralayalım:

1. adımda, tikel ve tümel-niceleme ifadeleri ile önerme eklemlerinin eş anlamlıları standart niceleme ifadeleriyle ve önerme eklemleri ile değiştirilerek, noktalama işaretlerine uygun olarak parantezler yerleştirilir.
2. adımda, niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri yerine niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerleştirilir.
3. adımda, *X* bir değişken veya ad, ***Y*** bir yüklem ifadesi olmak üzere, (*X**Y***) biçimindeki gündelik dil formülleri yerine {***Y***}*X* ifadesi konur.
4. adımda parantezli yüklem ifadeleri yerine sembolleştirme anahtarında verilen yüklem sembolleri konur.
5. adımda ifadede geçen adlar yerine ad sembolleri konur.
6. adımda, istenirse, kimi parantezler kurallara uygun olarak kaldırılabilir.

Nicelemeli bir gündelik dil önermesinin niceleme mantığı bakımından denetlenmesi, bu önermenin sembolleştirilmesinin niceleme mantığında denetlenmesi demektir. Önermenin sembolleştirilmesinin niceleme mantığına göre geçerli, tutarlı, olumsal, çelişme olmasına göre, gündelik dil önermesi niceleme mantığı bakımından geçerli, tutarlı, olumsal ya da çelişme olur. Nicelemeli bir gündelik dil çıkarımının niceleme mantığı bakımından denetlenmesi, bu çıkarımın sembolleştirilmesinin niceleme mantığında denetlenmesi demektir. Çıkarımın sembolleştirilmesinin niceleme mantığına göre geçerli veya geçersiz olmasına göre, gündelik dil çıkarımı niceleme mantığı bakımından geçerli veya geçersizdir.

Nicelemeli sembolik önerme ve çıkarımları gündelik dile çevirebilmek,

Nicelemeli bir sembolik önermenin gündelik dildeki karşılığını oluşturduğumuzda, bu sembolik önermeyi gündelik dile çevirdiğimizi söyleriz. Gündelik dile çevirme işlemini de, sembolleştirmede olduğu gibi adım adım gerçekleştireceğiz. Gündelik dile çevirme işlemi, sembolleştirme işleminin tersi olduğundan, sembolik bir önermeyi gündelik dile çevirirken, sembolleştirmede izlediğimiz adımları tersine çeviririz. Gündelik dile çeviri adımlarını açıkça sıralayalım:

1. adımda, en dıştaki parantezler hariç, okuma kolaylığı sağlamak için kaldırılmış olan parantezler eklenir.
2. adımda, ad sembolleri yerine, sembolleştirme anahtarında verilen adlar konur.
3. adımda, yüklem sembolleri yerine, sembolleştirme anahtarında verilen yüklem ifadesi küme parantezleri içine konur. Hemen yanına yüklemin uygulandığı değişken veya ad konur.
4. adımda, önermede geçen {***Y***(*a*)}X ifadeleri yerine, ***Y***(*a*) yüklem ifadesinde a yerine *X* değişken veya ad sembolünün konmasıyla elde edilen ***Y***(*X*) ifadesi konur.

5. adımda, niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerine gündelik dildeki niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri konur.
6. adımda, doğal bir ifade elde etmek için parantezler yerine noktalama işaretleri konur ve istenirse kimi niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri eşanlamlı başka ifadelerle değiştirilir.

Önermeler mantığında olduğu gibi, gündelik dile çeviri ile nicelemeli bir sembolik önerme veya çıkarımın semantik statüsü hakkında bilgi edinebiliriz. Eğer bir sembolik önermenin gündelik dile bir çeviri anahtarına göre çevirisi yanlış bir gündelik dil önermesi ise, bu sembolik önerme geçersizdir. Eğer bir sembolik önermenin gündelik dile bir çeviri anahtarına göre çevirisi doğru bir gündelik dil önermesi ise, bu sembolik önerme tutarlıdır. Bir sembolik çıkarımın bir çeviri anahtarına göre gündelik dile çevirisi olan çıkarımın öncülleri doğru ancak sonucu yanlış ise, bu sembolik çıkarım geçersizdir.

Kendimizi Sınayalım

F: *a* sayıdır.
G: *a* çift sayıdır.
H: *a* tek sayıdır.

1. Yukarıdaki çeviri anahtarına göre, $\forall x\,(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx))$ sembolik önermesinin gündelik dile çevirisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Her sayı ya tek ya da çift sayıdır.
b. Her çift sayı bir sayıdır.
c. Her tek sayı bir sayıdır.
d. Her çift ya da tek sayı bir sayıdır.
e. Her tek ya da çift sayı bir sayıdır.

F: *a* başarılı olur.
G: *a* bir adaydır.
A: Ahmet

2. Yukarıdaki çeviri anahtarına göre, $(FA \leftrightarrow \exists y\,(Gy \wedge {\sim}Fy))$ sembolik önermesinin gündelik dile çevirisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Bazı adaylar ancak ve ancak Ahmet başarılı olmazsa başarılı olur.
b. Ahmet başarılı olmazsa hiçbir aday başarılı olmaz.
c. Ahmet ancak ve ancak bazı adaylar başarılı olmazsa başarılı olur.
d. Ahmet başarılı olursa her aday başarılı olur.
e. Her aday başarısız olursa Ahmet de başarısız olur.

F: *a* bir filozoftur.
G: *a* bir insandır.
A: Aristoteles

3. Yukarıdaki çeviri anahtarına göre, $GA \wedge FA \vee ({\sim}FA \rightarrow \forall x\,(Gx \rightarrow {\sim}Fx))$ sembolik önermesinin gündelik dile çevirisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Aristoteles hem bir insan hem de bir filozoftur ya da, Aristoteles bir filozof değilse hiçbir insan filozof değildir.
b. Aristoteles bir insandır ve, Aristoteles ya bir filozoftur ya da, Aristoteles bir filozof değilse hiçbir insan filozof değildir.
c. Aristoteles ne bir insan ne de bir filozof değilse, hiçbir insan filozof değildir.
d. Aristoteles bir insan değilse, bir filozof da değildir ve hiçbir insan filozof değildir.
e. Aristoteles bir insan değilse, bir filozof da değildir veya hiçbir insan filozof değildir.

F: *a* filozoftur.
G: *a* usçudur.
H: *a* deneycidir.

4. Yukarıdaki çeviri anahtarına göre, $\exists x\,(Fx \wedge Gx) \wedge \exists x\,(Fx \wedge Hx) \wedge \exists x\,(Fx \wedge ({\sim}Hx \wedge {\sim}Gx))$ sembolik önermesinin gündelik dile çevirisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Bazı usçular aynı zamanda deneyci ve bazı deneyciler usçudur ama bazı filozoflar ne deneyci ne de usçudur.
b. Bazı filozoflar deneyci ve bazı filozoflar usçudur ama bazı filozoflar hem deneyci hem de usçudur.
c. Bazı filozoflar usçu ve bazı filozoflar deneycidir ama bazı filozoflar ne deneyci ne de usçudur.
d. Bazı filozoflar usçu ve bazı filozoflar deneycidir ama bazı usçu olmayan filozoflar deneyci de değildir.
e. Bazı filozoflar deneyci ve bazı filozoflar usçudur ama bazı filozoflar ne deneyci ne de usçudur.

F: *a* bir sporcudur.
G: *a* sağlığına dikkat etmelidir.
H: *a* dengeli beslenmelidir.
K: *a* düzenli antrenman yapmalıdır.
A: Ahmet

5. Yukarıdaki çeviri anahtarına göre, $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)\ \therefore FA \rightarrow HA \wedge KA$ sembolik çıkarımının gündelik dile çevirisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Her sporcu dengeli beslenmelidir. O halde, Ahmet bir sporcu ise, dengeli beslenmeli ve düzenli antrenman yapmalıdır.
b. Her sporcu düzenli antrenman yapmalıdır. O halde, Ahmet bir sporcu ise, dengeli beslenmeli ve düzenli antrenman yapmalıdır.
c. Her sporcu sağlığına dikkat etmelidir. O halde, Ahmet bir sporcu ise, dengeli beslenmeli ve düzenli antrenman yapmalıdır.
d. Düzenli antrenman yapan her sporcu sağlığına dikkat etmelidir. O halde, Ahmet bir sporcu ise, dengeli beslenmeli ve düzenli antrenman yapmalıdır.
e. Her sporcu sağlığına dikkat etmelidir. O halde, Ahmet dengeli beslenmeli ve düzenli antrenman yapmalı ise Ahmet sporcudur.

F: *a* hayvandır.
G: *a* et oburdur.
H: *a* ot oburdur.

6. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, "Bazı hayvanlar ne ot obur ne de et oburdur" önermesinin niceleme mantığında sembolleştirmesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\exists x (Fx \lor (\sim Gx \land \sim Hx))$
b. $\exists x (Fx \lor (\sim Gx \lor \sim Hx))$
c. $\exists x (Fx \land \sim(Gx \land Hx))$
d. $\exists x (Fx \land (\sim Gx \land \sim Hx))$
e. $\exists x ((Fx \land \sim Gx) \land \sim Hx)$

F: *a* insandır.
G: *a* yaptığının kötülük olduğunu bilir.
H: *a* kötülük yapar.

7. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, "Yaptığının kötülük olduğunu bilen hiçbir insan kötülük yapmaz" önermesinin niceleme mantığında sembolleştirmesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\forall x ((Fx \land Gx) \land \sim Hx)$
b. $\forall x (Gx \rightarrow (Fx \land \sim Hx))$
c. $\forall x (Gx \rightarrow Fx) \land \sim Hx))$
d. $\forall x (Fx \rightarrow \sim (Gx \land \sim Hx))$
e. $\forall x ((Gx \land Fx) \rightarrow \sim Hx)$

F: *a* cisimdir.
G: *a* ısıtılır.
H: *a* genleşir.

8. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, "Cisimler ısıtıldığında genleşir" önermesinin niceleme mantığında sembolleştirmesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\forall x (Fx \rightarrow (Gx \land Hx))$
b. $\forall x (Fx \land (Gx \rightarrow Hx))$
c. $\forall x (Fx \rightarrow (Gx \rightarrow Hx))$
d. $\forall x ((Gx \rightarrow Hx) \rightarrow Fx)$
e. $\forall x ((Fx \rightarrow Gx) \rightarrow Hx)$

F: *a* filozoftur.
G: *a* pozitivisttir.
H: *a* deneycidir.

9. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, "Bütün pozitivist filozoflar deneycidir. O halde, bazı deneyci filozoflar pozitivisttir." çıkarımının niceleme mantığında sembolleştirmesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\forall x (\mathrm{Gx} \land \mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Hx}) \therefore \exists x (\mathrm{H}x \land \mathrm{F}x \rightarrow \mathrm{G}x)$
b. $\forall x (Gx \land Fx \rightarrow Hx) \therefore \exists x (Hx \rightarrow Fx \land Gx)$
c. $\forall x ((Gx \rightarrow Fx) \land Hx) \therefore \exists x (Hx \land Fx \land Gx)$
d. $\forall x (Gx \land Fx \rightarrow Hx) \therefore \exists x ((Hx \land Fx) \land Gx)$
e. $\forall x (Gx \land Fx \rightarrow Hx) \therefore \exists x ((Gx \land Fx) \land Hx)$

F: a bilgidir.
G: a deneyle elde edilebilir.
H: a akıl yürütme ile elde edilebilir.

10. Yukarıdaki sembolleştirme anahtarına göre, "Bazı bilgiler akıl yürütme ile elde edilebilir. Dolayısıyla, bazı bilgiler deneyle elde edilemez." çıkarımının niceleme mantığında sembolleştirmesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\exists x (Fx \land Hx) \therefore \exists x (Fx \land \sim Gx)$
b. $\exists x (Fx \rightarrow Hx) \therefore \exists x (Fx \land Gx)$
c. $\exists x (Fx \rightarrow Hx) \therefore \exists x (Fx \rightarrow \sim Gx)$
d. $\exists x (Fx \rightarrow Gx) \therefore \exists x (Fx \rightarrow \sim Gx)$
e. $\exists x (Fx \land Gx) \therefore \exists x (Fx \rightarrow Gx)$

Okuma Parçası

Sembolleştirme Niçin Önemlidir?

Modern mantığı geleneksel mantıktan ayıran en belirgin özelliği hiç şüphesiz sembolik görünümüdür.

Sembol (veya simge) kendinden başka bir şeyi temsil eden veya akla getiren bir işarettir. Bir şeyin başka bir şey için sembol olarak kullanılması ikisi arasında ne zorunlu ne de doğal bir ilişkinin olmasını gerektirir. Semboller anlaşmaya bağlı işaretlerdir. Örneğin herhangi bir milleti temsil eden bir bayrağın şu ya da bu renkte, şu ya da bu biçimde olması ne doğal ne de başka bir zorunluluktur. Oysa, bir tür bulutun yağmuru işaretlemesi, ya da yaprakların sararıp dökülmesiyle kışın yaklaşmakta olduğunu düşünmemiz bu şeyler arasında “doğal” diyebileceğimiz bir ilişkiye dayanmaktadır. Bu tür işaretlere, kullanımları anlaşmaya bağlı olmadığından, “sembol” demiyoruz. Doğada bir olgunun başka bir olguyu işaretlediği yalnız insanların değil hayvanların da davranışlarını düzenlemede kullandıkları bir bilgidir. Oysa sembol yapma ve kullanma öyle görünüyor ki, tümüyle insanoğluna özgü bir yetenektir.

Sembolün düşün yaşamındaki önemini bir kelime ile belirtmek gerekse, dil dediğimiz bildirişim aracının “kelime” dediğimiz sembollerden kurulu olduğunu söylemek yeter. Aynı şekilde rakamlar da sayıları belirleyen birer sembolden başka bir şey değildir. Ancak dilimizi oluşturan kelimelere, rakamlara o denli alışığız ki, bunların birtakım anlam veya nesneleri simgelediklerini çok kere düşünmeyiz bile. Mantık, matematik gibi alanlarda kullanılan özel semboller ise böyle alışık olduğumuz türden olmadıkları için çoğumuzca yadırganır. Hatta bazı kimseler için bunlar ya gizli anlamları olan birtakım korkulu nesneler, ya da düpedüz anlamsız işaretler olarak kalır. Doğrusu, pek az kişi ilk karşılaştığı bir sembolü veya formülü ürkmeden benimseyebilir. Bu nedenle “sembol” deyince çoğunluk aklımıza “garip” bir nesne, esrarlı, bir şey gelir. Oysa sembol olma yönünden mantık ve matematikteki işaretlerle, her gün kullandığımız kelimeler arasında bir fark yoktur. Sadece, daha soyut olan birincilere yeterince alışık değiliz, o kadar.

İşte modern mantık alışık olmadığımız bu yüzden bize garip gelen birtakım özel sembolleri çokça kullandığı içindir ki, “sembolik” veya “matematiksel” diye nitelendirilmektedir. Yoksa geniş anlamda geleneksel mantık da semboliktir. Orada da terimleri S, P ve M gibi harflerle, önerme kalıplarını A, E, I, O (veya SaP, SeP, SiP, SoP) gibi anlaşmaya bağlı işaretlerle temsil tekniği kullanılmaktadır. Şu kadar ki, bunlar hem sayı olarak az, hem de basit görünümlü olduğundan yeni öğrenenler için fazla bir güçlük yaratmamaktadır. Matematik gibi modern mantığın da, sembollere dayanması nedeniyle baştan biraz karmaşık veya ürkütücü görünmesi olağandır. (...)

Sembolik notasyonla günlük dil arasındaki farkı, etkinlik ve işlerlik yönlerinden, romen rakamlarıyla aritmetikte kullandığımız rakamlar arasındaki farka benzetebiliriz. İkisi de sayıları temsil eden sembolik notasyonlardır. Biriyle toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yapmak ne derece zorsa, ötekisi ile yapmak o derece kolaydır. Günlük dil (dolayısıyla geleneksel mantık) romen rakamları gibi, mantıksal ilişkileri belirlemede yeterince etkin, tam ve açık değildir. Daha doğrusu mantıkta istenen kesinlik ve açıklığı sağlayamamaktadır. Özellikle soyut kavram ve ilişkilerin dile getirilmesinde, bunlara dayalı problemlerin çözümünde, kuralları belli bir sembolik notasyon vazgeçilmez bir araçtır. Bunun en canlı örneğini matematikte görüyoruz. Herkes bilir ki, sayısal bir problemin çözümünde cebir aritmetikten, aritmetik de parmakla saymadan daha etkin ve üstündür. Etkinlik derecesindeki artışın sembolleşmede ulaşılan düzeye doğrudan bağlı olduğunu bu yöntemlere baktığımızda açıkça görmekteyiz.

Kısaca demek gerekirse,

1. Günlük dille anlatılması zor soyut kavram ve ilişkileri daha kolay, kısa ve açık bir şekilde ifade etmek,
2. Günlük dilin çok kere yol açtığı çok anlamlılığı, anlam belirsizliğini önlemek,
3. Düşünmeyi etkin ve sağlıklı kılmak, birtakım somut olgu veya ilişkilerin dar çerçevesini aşarak ona soyut düzeyin özgürlüğünde açılma, ilerleme olanağı kazandırmak,

ancak iyi bir sembolik notasyonla sağlanabildiğinden, matematik gibi, mantık da sembolleşme yoluna giderek bugünkü ileri düzeye çıkabilmiştir.

Russell, “yeni mantık düşünceye kanat taktı” derken sembolleşmenin bu değerini anlatmak istemiştir, herhalde.

Kaynak: Yıldırım, C. (1976) **100 Soruda Mantık El Kitabı**. İstanbul: Gerçek Yayınevi, s. 143-146.

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Gündelik Dile Çeviri” konusuna bakınız.
2. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Gündelik Dile Çeviri” konusuna bakınız.
3. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Gündelik Dile Çeviri” konusuna bakınız.
4. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Gündelik Dile Çeviri” konusuna bakınız.
5. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Gündelik Dile Çeviri” konusuna bakınız.
6. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
7. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
8. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
9. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.
10. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin “Sembolleştirme” konusuna bakınız.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

“Eğer her zengin insan mutlu ise, Ahmet mutludur” önermesini bize verilen sembolleştirme anahtarına göre sembolleştirelim:

1. adımda,

   Her x (x zengindir ve x insandır ise x mutludur) ise Ahmet mutludur.

   ifadesini elde ederiz.

2. adımda, niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri yerine niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerleştirerek,

   $\forall x$ (x zengindir $\wedge$ x insandır ise x mutludur) $\rightarrow$ Ahmet mutludur.

   ifadesini elde ederiz.

3. adımda, $(X\boldsymbol{Y})$ biçimindeki gündelik dil formülleri yerine $\{\boldsymbol{Y}\}X$ ifadelerini koyarak,

   $\forall x$ ({a zengindir}x $\wedge$ {a insandır}x ise {a mutludur}x) $\rightarrow$ {a mutludur}Ahmet

   ifadesini elde ederiz.

4. adımda, parantezli yüklem ifadeleri yerine sembolleştirme anahtarında verilen yüklem sembollerini koyarak,

   $\forall x\,(Fx \wedge Gx \rightarrow Hx) \rightarrow H$Ahmet

5. adımda ifadede geçen adlar yerine ad sembollerini koyarak,

   $\forall x\,(Fx \wedge Gx \rightarrow Hx) \rightarrow HA$

   nicelemeli sembolik önermesini elde ederiz.

6. adımda, önermede kurallara uygun olarak kaldırılabilecek parantez olmadığından,

   $\forall x\,(Fx \wedge Gx \rightarrow Hx) \rightarrow HA$

   önermesi, “Eğer her zengin insan mutlu ise, Ahmet mutludur” önermesinin verilen sembolleştirme anahtarına göre sembolleştirmesi olarak elde edilir.

Sıra Sizde 2

“Her satranç oyunu ya berabere ya da matla biter” önermesini niceleme mantığında, verilen sembolleştirme anahtarına göre sembolleştirelim:

1. adımda,

   Her x (x bir satranç oyunudur ise (x berabere biter veya x matla biter))

   ifadesini elde ederiz.

2. adımda, niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri yerine niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerleştirerek,

   $\forall x$ (x bir satranç oyunudur $\rightarrow$ (x berabere biter $\vee$ x matla biter))

   ifadesini elde ederiz.

3. adımda, $(X\mathbf{Y})$ biçimindeki gündelik dil formülleri yerine $\{\mathbf{Y}\}X$ ifadelerini koyarak,

   $\forall x$ ({a bir satranç oyunudur}x $\rightarrow$ ({a berabere biter}x $\vee$ {a matla biter}x))

   ifadesini elde ederiz.

4. adımda, parantezli yüklem ifadeleri yerine sembolleştirme anahtarında verilen yüklem sembollerini koyarak,

   $\forall x\,(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx))$

5. adımda, ifadede hiçbir ad sembolü geçmediğinden yine,

   $\forall x\,(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx))$

   nicelemeli sembolik önermesini elde ederiz.

6. adımda, tikel-evetleme ekleminin koşul eklemine göre önceliği olduğundan, tikel-evetlemeye ait parantezleri kaldırarak,

   $\forall x\,(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx))$

   önermesini, "Her satranç oyunu ya berabere ya da matla biter" önermesini niceleme mantığında, verilen sembolleştirme anahtarına göre sembolleştirmesi olarak elde ederiz.

Sıra Sizde 3

$\forall x\,(Fx \rightarrow \exists y\,(Hy \wedge Gy))$ sembolik önermesini verilen çeviri anahtarına göre gündelik dile çevirelim:

1. adımda, kurallara uygun olarak kaldırılacak parantez olmadığından yine,

   $\forall x\,(Fx \rightarrow \exists y\,(Hy \wedge Gy))$

   sembolik önermesini elde ederiz.

2. adımda, önermede ad sembolü olmadığından yine,

   $\forall x\,(Fx \rightarrow \exists y\,(Hy \wedge Gy))$

   önermesini elde ederiz.

3. adımda, yüklem sembolleri yerine, sembolleştirme anahtarında verilen yüklem ifadelerini küme parantezleri içine alıp hemen yanlarına yüklemin uygulandığı değişkeni koyarak,

   $\forall x$ ({a roman okurudur}x $\rightarrow$ $\exists y$ ({a iyidir}y $\wedge$ {a bir romandır}y))

   ifadesini elde ederiz.

4. adımda, önermede geçen $\{\mathbf{Y}(a)\}X$ ifadeleri yerine, $\mathbf{Y}(a)$ yüklem ifadesinde a yerine X değişken veya ad sembolünün konmasıyla elde edilen $\mathbf{Y}(X)$ ifadesini koyarak,

   $\forall x$ (x roman okurudur $\rightarrow$ $\exists y$ (y iyidir $\wedge$ y bir romandır))

   ifadesini elde ederiz.

5. adımda, niceleyiciler ve önerme eklemi sembolleri yerine gündelik dildeki niceleme ifadeleri ve önerme eklemlerini koyarak,

   Her x (x roman okurudur ise bazı y (y iyidir
   ve y bir romandır))

6. adımda, doğal bir ifade elde etmek için parantezler yerine noktalama işaretleri konur ve niceleme ifadeleri ve önerme eklemleri eşanlamlı başka ifadelerle değiştirilerek,

   Her roman okuru için bazı iyi romanlar vardır.

   önermesi elde edilir.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. (2000). **Sembolik Mantık El Kitabı.** (3 Cilt). Ankara: METU Press.

Grünberg, T. ve Onart, A. vd. (2003). **Mantık Terimleri Sözlüğü.** Ankara: METU Press.

Kalish, D., Montague, R. ve Mar, G. (1980). **Logic: Techniques of Formal Reasoning.** 2. Baskı. New York: Oxford University Press.

Ural, Ş. (1995). **Temel Mantık.** İstanbul: Çantay Kitabevi.

Yıldırım, C. (1976). **100 Soruda Mantık El Kitabı.** İstanbul: Gerçek Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999). **Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi.** İstanbul: Bilgi Yayınevi.

SEMBOLİK MANTIK

8

Amaçlarımız

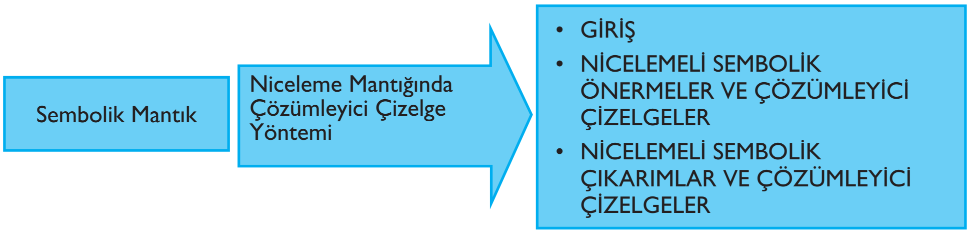
Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Çözümleyici çizelge yöntemi ile nicelemeli sembolik önermeleri denetleyebilecek,
- Çözümleyici çizelge yöntemi ile nicelemeli sembolik çıkarımları denetleyebileceksiniz.

Anahtar Kavramlar

- Çözümleyici çizelge
- Tümel-özelleme
- Tikel-özelleme
- Açık dal
- Kapalı dal
- Tamamlanmış çizelge
- Model
- Karşı-model

İçerik Haritası



Sembolik Mantık

Niceleme Mantığında Çözümleyici Çizelge Yöntemi

- GİRİŞ
- NİCELEMELİ SEMBOLİK ÖNERMELER VE ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGELER
- NİCELEMELİ SEMBOLİK ÇIKARIMLAR VE ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGELER

Niceleme Mantığında Çözümleyici Çizelge Yöntemi

GİRİŞ

Bu ünitede, dördüncü ünitede gördüğümüz çözümleyici çizelge kurallarına niceleyiciler için gerekli kuralları ekleyerek, çözümleyici çizelge yöntemini nicelemeli sembolik önerme ve çıkarımları denetlemek için kullanacağız. Önermeler mantığında gördüğümüz çözümleyici çizelge kurallarını da kullanmaya devam edeceğimiz için, dördüncü üniteye dönüp bu kuralları tekrar hatırlayıp gözden geçirmenizi tavsiye ediyoruz.

Altıncı ünitede, doğrusal açılım yöntemi ile, nicelemeli bir sembolik önermenin bir modeldeki doğruluk değerini nasıl hesaplayacağımızı, nicelemeli bir sembolik önermenin veya çıkarımın bir modelini ve karşı-modelini nasıl oluşturabileceğimizi görmüştük. Doğrusal açılımla model ve karşı-model oluşturma yöntemini, nicelemeli sembolik önerme ve çıkarımların geçerliliğini denetlemek için de kullanabileceğimizi söylemiştik. Ancak, altıncı ünitede de kısaca belirttiğimiz gibi, bu yöntem geçerlilik denetlemesinde kullanışlı bir yöntem olmazdı. Nitekim bu yönteme göre, içinde n tane yüklem geçen bir önerme veya çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için 2^n elemanlı hiçbir karşı-model olamayacağını göstermek gereklidir. Bu ise, yöntemin karmaşıklık derecesinin yüklem sayısı ile birlikte çok hızlı artması demektir.

Aynı durum önermeler mantığında da karşımıza çıkmış ve önerme değişkenlerinin sayısı ile birlikte satır sayısı hızla artan doğruluk tablolarını kullanmak yerine, çözümleyici çizelgeleri kullanarak sembolik önerme ve çıkarımları denetleyebileceğimizi görmüştük. Çözümleyici çizelge yöntemi, niceleyicileri ele alabilmemiz için birkaç yeni kural eklendiğinde, niceleme mantığı için de kullanışlı bir denetleme yöntemi sağlamaktadır.

Bu ünitenin ilk kısmında, niceleyiciler için çözümleyici çizelge kurallarını tanımlayıp açıklayarak, nicelemeli bir sembolik önermenin çözümleyici çizelgesini nasıl oluşturacağımızı ve çözümleyici çizelge yöntemi ile nicelemeli bir sembolik önermeyi nasıl denetleyeceğimizi göreceğiz. İkinci ve son kısımda ise, nicelemeli sembolik önerme kümelerinin ve nicelemeli sembolik çıkarımların çözümleyici çizelge yöntemi ile denetlenmesi konusunu ele alacağız.

NİCELEMELİ SEMBOLİK ÖNERMELER VE ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGELER

Dördüncü ünitede açıkladığımız gibi, çözümleyici çizelge yönteminin ana fikri, çizelgedeki noktalarda bulunan önermelerin doğru olması için yeterli olan şartların belirtilmesidir. Bu şekilde, çizelgede açık bir dal bularak önerme için bir model oluşturmaya çalışılır. İlk olarak, çözümleyici çizelge ile bir önermenin bir modeldeki doğruluk değerinin nasıl hesaplanacağını görelim.

Çözümleyici Çizelge İle Doğruluk Değeri Hesaplanması

Altıncı üniteden, doğrusal açılım yöntemi ile nicelemeli sembolik önermelerin bir modeldeki doğruluk değerini nasıl belirleyeceğimizi biliyoruz: $S = \{a, b, c, \ldots\}$ ve her $s \in S$ elemanı için $\boldsymbol{A}(s)$ ifadesi $\boldsymbol{A}$ ifadesinden v değişkeninin her geçtiği yere *s* elemanının konmasıyla elde edilen ifade ise,

a. $\forall v\, \boldsymbol{A}$ ifadesinin *S* kümesindeki bir doğrusal açılımı $\boldsymbol{A}(a) \wedge \boldsymbol{A}(b) \wedge \boldsymbol{A}(c) \wedge \ldots$ ifadesi,

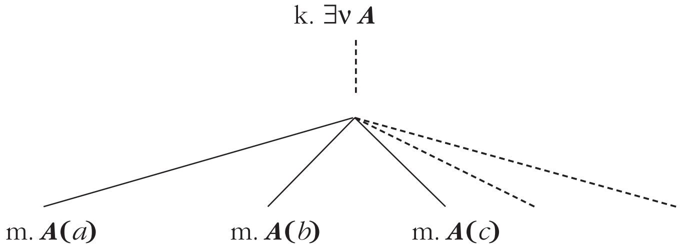
b. $\exists v\, \boldsymbol{A}$ ifadesinin *S* kümesindeki bir doğrusal açılımı $\boldsymbol{A}(a) \vee \boldsymbol{A}(b) \vee \boldsymbol{A}(c) \vee \ldots$ ifadesidir.

Öyleyse, doğrusal açılım sonucunda, $\forall v\, \boldsymbol{A}$ biçimindeki tümel-niceleme ifadeleri tümel-evetleme ifadelerine, $\exists v\, \boldsymbol{A}$ biçimindeki tikel-niceleme ifadeleri de tikel-evetleme ifadelerine dönüşmektedir. Dolayısıyla, tümel-evetleme ve tikel-evetleme eklemlerine ait çizelge kurallarını bildiğiniz için, çözümleyici çizelge ile doğruluk değeri denetlemesinde kullanılacak olan, tümel ve tikel-niceleyicilere ait kuralların aşağıdaki şekilde tanımlandığını görmek sizi şaşırtmayacaktır.

Tümel-nicelemenin açılımı: $\forall v\, \boldsymbol{A}$ tümel-nicelemeli önermesinin bir modelde doğru olması, $\boldsymbol{A}(a) \wedge \boldsymbol{A}(b) \wedge \boldsymbol{A}(c) \wedge \ldots$ ifadesinin bu modelde doğru olması demektir. Bu ise, $\boldsymbol{A}(a), \boldsymbol{A}(b), \boldsymbol{A}(c), \ldots$ ifadelerinin her birinin doğru olması demektir. Buna göre, çözümleyici çizelge yöntemiyle, nicelemeli bir sembolik önermenin bir modeldeki doğruluk değerini hesaplarken, bir noktada $\forall v\, \boldsymbol{A}$ biçiminde tümel-nicelemeli bir ifade ortaya çıktığında, modelin evrenindeki *her bir s* elemanı için oluşturulan $\boldsymbol{A}(s)$ ifadeleri alt alta yazılır:

k. $\forall v\, \boldsymbol{A}$
⋮
m. $\boldsymbol{A}(a)$
m+1 $\boldsymbol{A}(b)$
⋮

Tikel-nicelemenin açılımı: $\exists v\, \boldsymbol{A}$ tikel-nicelemeli önermesinin bir modelde doğru olması, $\boldsymbol{A}(a) \vee \boldsymbol{A}(b) \vee \boldsymbol{A}(c) \vee \ldots$ ifadesinin bu modelde doğru olması demektir. Bu ise, $\boldsymbol{A}(a), \boldsymbol{A}(b), \boldsymbol{A}(c), \ldots$ ifadelerinden en az birinin bu modelde doğru olması demektir. Buna göre, çözümleyici çizelge yöntemiyle, nicelemeli bir sembolik önermenin bir modelde doğruluk değerini hesaplarken, bir noktada $\exists v\, \boldsymbol{A}$ biçiminde tikel-nicelemeli bir ifade ortaya çıktığında, dala bir çatal eklenerek modelin evrenindeki *her s* elemanı için oluşturulan $\boldsymbol{A}(s)$ ifadesi çatalın uçlarına eklenir:



Çözümleyici çizelge yöntemini niceleme mantığında kullanabilmek için, tümel ve tikel-nicelemenin açılımı kurallarından başka bir de niceleyicilerin değillenmesi ile ilgili kurallara ihtiyacımız vardır. İki niceleyici kullandığımızdan, niceleyici değilleme kuralları da iki tanedir:

Tümel-niceleyicinin değillenmesi kuralı: $\sim\forall\nu\, \boldsymbol{A}$ ve $\exists\nu \sim\!\boldsymbol{A}$ önermeleri niceleme mantığında eşdeğer önermeler olduğundan, daldaki bir üst noktada $\sim\forall\nu\, \boldsymbol{A}$ ifadesi varsa, o dalda bir nokta olarak $\exists\nu \sim\!\boldsymbol{A}$ ifadesi eklenir:

k. $\sim\forall\nu\, \boldsymbol{A}$

m. $\exists\nu \sim\!\boldsymbol{A}$

Tikel-niceleyicinin değillenmesi kuralı: $\sim\exists\nu\, \boldsymbol{A}$ ve $\forall\nu \sim\!\boldsymbol{A}$ önermeleri niceleme mantığında eşdeğer önermeler olduğundan, daldaki bir üst noktada $\sim\exists\nu\, \boldsymbol{A}$ ifadesi varsa, o dalda bir nokta olarak $\forall\nu \sim\!\boldsymbol{A}$ ifadesi eklenir:

k. $\sim\exists\nu\, \boldsymbol{A}$

m. $\forall\nu \sim\!\boldsymbol{A}$

Nicelemeli bir sembolik önermenin verilen bir modeldeki doğruluk değerini çözümleyici çizelge yöntemi ile nasıl hesaplayacağımızı görelim. İlk olarak, önermede geçen ad sembolleri yerine, bunların modelde karşılığı olarak verilen elemanları yazarak elde ettiğimiz ifadeyi, çözümleyici çizelgenin 1 numaralı kök noktasına yazarız. Ardından tümel ve tikel-nicelemenin açılımı kurallarını, niceleyici değilleme kurallarını ve önerme eklemlerine ait çözümleyici çizelge kurallarını kullanarak ilerleriz. Bir dalda ilerlerken, $\boldsymbol{Y}$ bir yüklem sembolü, s modelin evreninin bir elemanı olmak üzere $\boldsymbol{Y}s$ veya $\sim\!\boldsymbol{Y}s$ biçimindeki bir ifade ortaya çıktığında;

- Dalda ortaya çıkan ifade $\boldsymbol{Y}s$ ise ve modelde $s \in \boldsymbol{Y}^M$ ise, $\boldsymbol{Y}s$ ifadesi doğrudur ve o dalda ilerlemeye devam ederiz.
- Dalda ortaya çıkan ifade $\sim\!\boldsymbol{Y}s$ ise ve modelde $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ ise, $\sim\!\boldsymbol{Y}s$ ifadesi doğrudur ve yine o dalda ilerlemeye devam edebiliriz.
- Dalda ortaya çıkan ifade $\boldsymbol{Y}s$ ifadesi ise ve modelde $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ ise, $\boldsymbol{Y}s$ ifadesi yanlıştır ve o dalda daha fazla ilerlemeden, dalın sonuna bir × (çarpı) işareti koyarız ve bu dalın "yanlış" bir dal olduğunu söyleriz.
- Dalda ortaya çıkan ifade $\sim\!\boldsymbol{Y}s$ ifadesi ise ve modelde $s \in \boldsymbol{Y}^M$ ise,$\sim\!\boldsymbol{Y}s$ ifadesi yanlıştır ve o dalda daha fazla ilerlemeden, dalın sonuna bir × (çarpı) işareti koyarız ve bu dalın "yanlış" bir dal olduğunu söyleriz.

Çözümleyici çizelge ile nicelemeli bir sembolik önermenin bir modelde doğruluk değerini hesaplarken, çizelgede en az bir doğru dal ortaya çıkarsa, önerme bize verilen modelde doğrudur. Çizelgede tüm dallar yanlış ise, önerme bize verilen modelde yanlıştır.

Çizelgedeki bir dalda işlem uygulanacak bir ifade kalmadığı halde, o daldaki (Fa, $\sim Gb$ ifadeleri gibi) ***Ys*** ve ***~Ys*** biçimindeki tüm basit ifadeler ve değillenmiş basit ifadeler ifadeleri doğru ise, o dal “doğru” bir daldır. Çizelgede en az bir doğru dal ortaya çıkarsa, tamamlanmamış dallar kalmış olsa bile, önermenin bize verilen modelde doğru olduğunu söyleyebiliriz. Çizelgede tüm dallar yanlış ise, önerme bize verilen modelde yanlıştır.

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, nicelemeli bir sembolik önermenin bir modeldeki doğruluk değerini hesaplarken, başvurulması zorunlu olmayan ama çizelgeyi olabildiğince basit tutmak ve böylece hata yapmaktan kaçınmak için izleyebileceğimiz “öncelik kuralları” vardır:

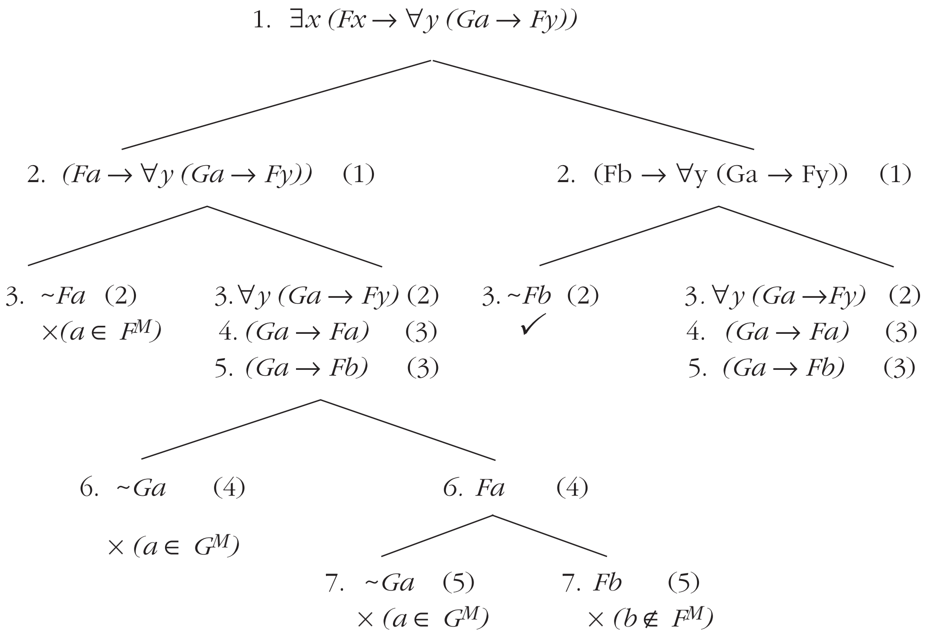
- Niceleyici-değilleme kuralları tüm kurallardan önce uygulanmalıdır.
- Tümel-nicelemenin açılımı kuralı tikel-nicelemenin açılımı kuralından önce uygulanmalıdır.
- Önerme eklemleri elenirken, alt alta yazma gerektiren kurallar çatal açma kurallarından önce uygulanmalıdır.
- Bir niceleyici kuralı ile önerme eklemi kuralı arasında seçim yapmamız gerektiğinde de, alt alta yazma gerektiren kural çatal açma kurallarından önce uygulanmalıdır. Örneğin, dalda bir tümel-niceleme ve bir tikel-evetleme önermesi varsa, önce tümel-nicelemenin açılımı kuralı uygulanmalıdır.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, $\exists x\,(Fx \rightarrow \forall y\,(GA \rightarrow Fy))$ *önermesinin aşağıda belirtilen modeldeki doğruluk değerini hesaplayalım:*

$$S_M = \{a,\ b\}, \qquad F^M = \{a\}, \qquad G^M = \{a, b\}, \qquad A^M = a$$

İlk olarak, önermede geçen A ad sembolü yerine, bu sembolün modelde karşılığı olan $A^M = a$ *elemanını koyalım. Şimdi elde ettiğimiz* $\exists x\,(Fx \rightarrow \forall y\,(Ga \rightarrow Fy))$ *ifadesini kök noktasına yerleştirerek çözümleyici çizelgeyi oluşturalım:*



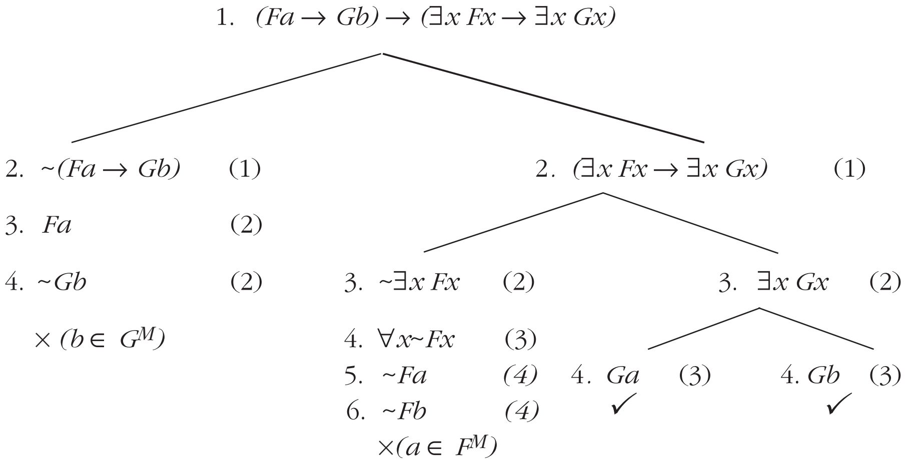
Çizelgede ✓ işareti ile gösterdiğimiz dal doğru bir daldır: Bu dalda kendisine işlem uygulayarak ilerlememizi gerektiren bir ifade yoktur (işlem uygulanmamış bir niceleyici veya önerme eklemi olsaydı, dalda devam etmemiz gerekirdi) ve ***Ys*** veya **~*Ys*** biçimindeki tek ifade olan ~*Fb* ifadesi, $b \notin F^M$ olduğundan, doğrudur. Çizelgede doğru bir dal ortaya çıktığı için, $\exists x\ (Fx \rightarrow \forall y\ (GA \rightarrow Fy))$ önermesi bize verilen modelde doğrudur. Doğru bir dalın çıkması önermenin verilen modelde doğru olması için yeterli olduğundan, en sağdaki dalda devam etmediğimize dikkat ediniz.

DİKKAT

İşlem uygulanmamış bir niceleyici veya önerme eklemi bulunan bir dal tamamlanmamış daldır. Bu noktalara işlem uygulandığında dal yanlış hale geçebileceğinden, tamamlanmamış bir dalın doğru olduğuna karar verilemez.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, $(FA \rightarrow GB) \rightarrow (\exists x\ Fx \rightarrow \exists x\ Gx)$ *önermesinin,* $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a, b\}$, $A^M = a$, $B^M = b$ *modelindeki doğruluk değerini hesaplayalım. İlk olarak, önermede geçen A ve B ad sembolleri yerine, bu sembollerin modelde karşılığı olarak verilmiş a ve b elemanlarını koyalım. Şimdi elde ettiğimiz* $(Fa \rightarrow Gb) \rightarrow (\exists x\ Fx \rightarrow \exists x\ Gx)$ *ifadesini kök noktasına yerleştirerek çözümleyici çizelgeyi oluşturalım:*



Çizelgede ✓ işareti ile gösterdiğimiz iki dal doğru dallardır: Bu dallarda kendisine işlem uygulayarak ilerlememizi gerektiren bir ifade yoktur ve ***Ys*** veya **~*Ys*** biçimindeki *Ga* ve *Gb* ifadeleri, $a \in G^M$ ve $b \in G^M$ olduğundan doğrudur. Çizelgede doğru en az bir dal çıkması bile yeterli olduğundan, $(FA \rightarrow GB) \rightarrow (\exists x\ Fx \rightarrow \exists x\ Gx)$ önermesi bize verilen modelde doğrudur.

SIRA SİZDE 1

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, $(GA \rightarrow \forall y(Fy \rightarrow \exists x\ Gx))$ önermesinin $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a, b\}$, $A^M = a$ modelindeki doğruluk değerini hesaplayınız.

Çözümleyici Çizelge İle Önermeler İçin Model ve Karşı-Model Oluşturulması

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, nicelemeli bir sembolik önermenin modelini oluştururken, açılım kuralları yerine, *tümel-özelleme* ve *tikel-özelleme* kurallarına başvuracağız. Bu kurallar şunlardır:

Çözümleyici çizelge ile model oluştururken, bir dalda ∀ν ***A*** biçiminde bir önerme ortaya çıktığında, o dalda ortaya çıkmış her *s* elemanı için ***A*****(*****s*****)** ifadesi dala eklenmelidir.

Tümel-özelleme: ∀ν ***A*** tümel-nicelemeli önermesinin bir modelde doğru olması için, bu modeldeki her *s* elemanı için ***A*****(*****s*****)** ifadesinin doğru olması gerekir. Dolayısıyla, çözümleyici çizelgede bir dalda ilerlerken ∀ν ***A*** biçiminde bir önerme ortaya çıktığında, o dalda ortaya çıkmış her s elemanı için ***A*****(*****s*****)** ifadesi dala eklenmelidir:

k. ∀ν ***A***

m. ***A*****(*****s*****)** (*s* herhangi bir eleman)

Çözümleyici çizelge ile model oluştururken bir dalda ∃ν ***A*** biçiminde bir önerme ortaya çıktığında, o dalda ortaya çıkmamış yeni bir *s* elemanı için ***A*****(*****s*****)** ifadesi dala eklenmelidir.

Tikel-özelleme: ∃ν ***A*** tikel-nicelemeli önermesinin bir modelde doğru olması için, bu modeldeki en az bir *s* elemanı için ***A*****(*****s*****)** ifadesinin doğru olması gerekir. Ancak, hangi *s* elemanı için ***A*****(*****s*****)** ifadesinin doğru olduğunu bilmediğimizden, tikel-niceleyicinin çözümleyici çizelge kuralında, o dalda daha önce ortaya çıkmış bir elemanı kullanamayız. Dolayısıyla, çözümleyici çizelgede bir dalda ilerlerken ∃ν ***A*** biçiminde bir önerme ortaya çıktığında, o dalda ortaya çıkmamış *yeni* bir *s* elemanı için ***A*****(*****s*****)** ifadesi dala eklenmelidir:

k. ∃ν ***A***

m. ***A*****(*****s*****)** (*s* o dalda *yeni* bir eleman)

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, nicelemeli bir sembolik önerme için bir model bulmak için,

1. Önermede her *S* ad sembolü yerine *s* elemanını yazarız: *A* yerine *a*, *B* yerine *b*, ... gibi. Bir ad sembolünün her geçtiği yere aynı eleman konmalıdır.
2. 1 numaralı kök noktasına elde ettiğimiz ifadeyi yazarız.
3. Tümel-özelleme ve tikel-özelleme kurallarını, tümel ve tikel-nicelemelerin değillenmesi kurallarını ve önerme eklemlerine ait kuralları uygulayarak ilerleriz. Burada özellikle dikkat etmemiz gereken nokta şudur: Dalda ortaya çıkan *her eleman için* o daldaki her ∀ν ***A*** ifadesine tümel-özelleme kuralı uygulanmalıdır. Bir ∀ν ***A*** ifadesine tümel-özelleme kuralı uygulandıktan sonra da dalda yeni bir eleman ortaya çıkarsa, ∀ν ***A*** ifadesine o eleman için de tümel-özelleme kuralı uygulanmalıdır.
4. Bir dalda ilerlerken, bir ifade ve onun değili ortaya çıkarsa o dal *kapalıdır* ve bu durum o dalın, sonuna × (çarpı) işareti konarak kapanmasıyla belirtilir.
5. İşlem uygulanacak bir ifade kalmadığı halde kapanmayan bir dal açık bir daldır. Bu durum o dalın sonuna bir ✓ işareti konarak gösterilir.
6. Bir önermenin çözümleyici çizelgesinde *tamamlanmış* (işlem uygulanacak bir ifade kalmamış dal) bir *açık* dal (bir ifade ve onun değilini bulundurmayan bir dal) ortaya çıkarsa, bu dallardan herhangi birine göre önermenin bir modeli oluşturulabilir: Modelin evreni o dalda ortaya çıkan elemanlardan

oluşmalıdır. Ad sembolleri, ilk aşamada yerlerine konan elemanlarla eşleştirilir: $A^M = a, B^M = b, \ldots$ Yüklem sembollerinin yorumlanmasında, o dalda ortaya çıkan ***Ys*** ve **~*Ys*** biçimindeki ifadelere bakılır. Dalda bir ***Ys*** ifadesi varsa modelde $s \in \boldsymbol{Y}^M$ olmalı, **~*Ys*** ifadesi varsa modelde $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ olmalıdır. Dalda ortaya çıkmış bir eleman ne ***Ys*** ne de **~*Ys*** ifadesinde ortaya çıkmamış ise, bu ***Y*** yüklemi için $s \in \boldsymbol{Y}^M$ veya $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ olarak karar verebiliriz. Böyle bir durum ortaya çıktığında, modeli basit tutmak için $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ seçeceğiz. Bu zorunlu değildir. $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ olmasının zorunlu olduğu tek durum, modeli kendisine göre oluşturduğumuz açık dalda **~*Ys*** ifadesinin olmasıdır.

Modeli oluştururken bir tek açık dala bakarak ilerlemeye dikkat ediniz. Birden çok açık dala bakarak model oluşturmak yanlıştır. Çizelgedeki tamamlanmış her açık dal ayrı ele alınmalıdır.

DİKKAT

Çözümleyici çizelge ile model oluştururken, çatal açma kurallarının alt alta yazma kurallarına önceliği vardır. Tikel-özelleme kuralı da tümel-özelleme kuralından önce uygulanmalıdır.

Çözümleyici çizelge ile model oluşturmaya çalışırken, olabildiğince fazla dal elde etmeye çalıştığımızdan, çatal açma kurallarının alt alta yazma kurallarına önceliği vardır. Ayrıca, tikel-özelleme kuralı tümel-özelleme kuralından önce uygulanmalıdır.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, $\exists x\,(Fx \wedge {\sim}Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge {\sim}Fy)$ *önermesi için bir model bulmaya çalışalım.*

1. $\exists x\,(Fx \wedge {\sim}Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge {\sim}Fy)$
2. $\exists x\,(Fx \wedge {\sim}Gx)$ (1)
3. $\exists y\,(Gy \wedge {\sim}Fy)$ (1)
4. $(Fa \wedge {\sim}Ga)$ (2)
5. Fa (4)
6. ${\sim}Ga$ (4)
7. $Gb \wedge {\sim}Fb$ (3)
8. Gb (7)
9. ${\sim}Fb$ (7)

✓

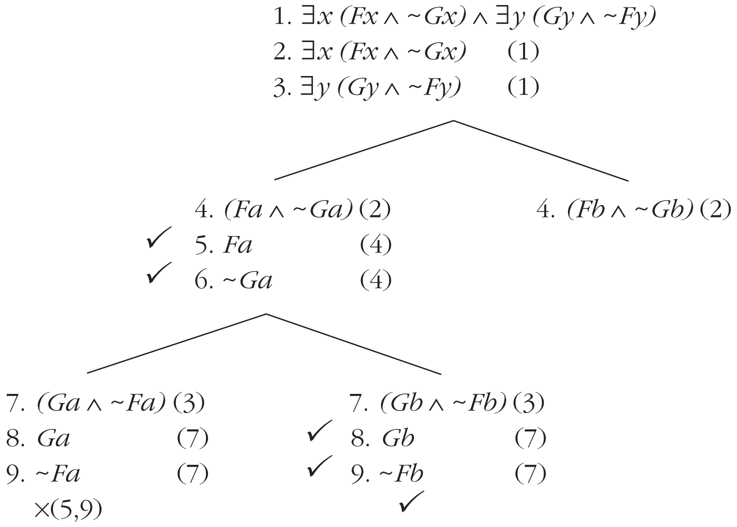
Çözümleyici çizelge bir tek daldan oluşmaktadır ve bu dal tamamlandığı halde açıktır. Dolayısıyla önermenin bir modeli vardır. Şimdi, açık dalda ortaya çıkan ***Ys*** ve **~*Ys*** biçimindeki ifadelere bakarak $\exists x\,(Fx \wedge {\sim}Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge {\sim}Fy)$ önermesinin bir M modelini oluşturalım: Dalda a ve b elemanları geçtiğinden, $S_M = \{a, b\}$ olur. Fa ve ${\sim}Fb$ olduğundan, $a \in F^M$ ve $b \notin F^M$ olmalıdır. Dolayısıyla, $F^M = \{a\}$ olarak belirlenir. ${\sim}Ga$ ve Gb olduğundan, $a \notin G^M$ ve $b \in G^M$ olmalıdır. Dolayısıyla, $G^M = \{b\}$ olarak belirlenir. Şimdi $\exists x\,(Fx \wedge {\sim}Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge {\sim}Fy)$ sembolik önermesi için elde ettiğimiz M modelini bütün olarak yazalım:

$$M: \quad S_M = \{a, b\}, \qquad F^M = \{a\}, \qquad G^M = \{b\}$$

Nicelemeli bir sembolik önerme için, çözümleyici çizelge yöntemi ile model oluşturma kurallarıyla bulduğumuz modelde önermenin doğru olması gerekir. Bunu da, daha önce gördüğümüz açılım yöntemiyle ya da, az önceki kısımda gördüğümüz gibi, çözümleyici çizelge ile gerçekleştirebiliriz.

ÖRNEK

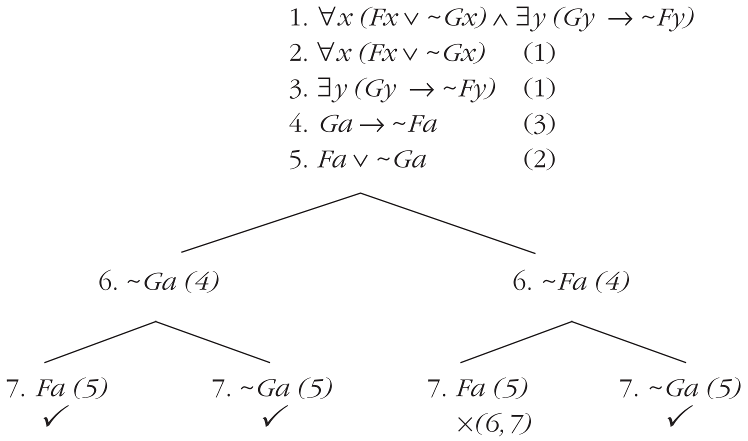
Çözümleyici çizelge yöntemi ile, bulduğumuz M: $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{b\}$ *modelinde* $\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge \sim Fy)$ *önermesinin doğruluk değerini hesaplayalım.*



Çözümleyici çizelgede ✓ işareti ile gösterdiğimiz dal, tamamlanmış bir doğru daldır. Bu dalda ortaya çıkan *Fa, ~Ga, Gb* ve *~Fb* ifadelerinin tümü modelde doğru olduğundan, $\exists x\,(Fx \wedge \sim Gx) \wedge \exists y\,(Gy \wedge \sim Fy)$ önermesi *M* modelinde doğrudur.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, $\forall x\,(Fx \vee \sim Gx) \wedge \exists y\,(Gy \rightarrow \sim Fy)$ *önermesi için bir model bulmaya çalışalım:*



İlk olarak tikel nicelemeyi gerçekleştirdiğimize dikkat ediniz. Çizelgede ✓ ile işaretlediğimiz dallar tamamlanmış ve açıktır. Önermenin modelini bu dallardan herhangi birine göre oluşturabiliriz. En soldaki dala göre ortaya çıkan model aşağıdaki gibidir:

M: $S_M = \{a\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{\ \}$

Bildiğiniz gibi, bir önermenin yanlış olduğu bir model, o önermenin bir karşı-modelidir. ***A*** önermesinin yanlış olması, **~*A*** önermesinin doğru olması demektir. Yani, nicelemeli bir ***A*** sembolik önermesinin bir karşı-modelini oluşturmak demek **~*A*** önermesinin bir modelini oluşturmak demektir. Dolayısıyla, çözümleyici çizelge yöntemi ile ***A*** önermesinin bir karşı-modelini oluşturmak için, **~*A*** önermesinde her *S* ad sembolü yerine *s* elemanını koyarak elde ettiğimiz ifadeyi 1. numaralı kök noktasına koyarak çizelgeyi oluşturmaya başlar ve model oluştururken belirttiğimiz (3)-(6) kurallarını aynen uygularız.

Çözümleyici çizelge yöntemi ile ***A*** önermesinin bir karşı-modelini oluşturmak için, ~***A*** önermesinde her *S* ad sembolü yerine *s* elemanını koyarak elde ettiğimiz ifadeyi kök noktasına koyarak model oluşturma kurallarına göre ilerleriz.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemiyle (FA ↔ GB) → ∃x (Fx ∨ Gx) önermesi için bir karşı-model bulmaya çalışalım:

Önermenin değilinde geçen ad sembollerini birer elemanla eşleştirerek ~((Fa ↔ Gb) → ∃x (Fx ∨ Gx)) ifadesini elde ederiz. Karşı-model oluşturmaya çalıştığımızdan, bu ifadenin çözümleyici çizelgesini oluşturalım:

1. $\sim((Fa \leftrightarrow Gb) \rightarrow \exists x\,(Fx \vee Gx))$
2. $(Fa \leftrightarrow Gb)$ (1)
3. $\sim\exists x\,(Fx \vee Gx)$ (1)
4. $\forall x \sim(Fx \vee Gx)$ (3)

5.	Fa	(2)	5.	$\sim Fa$	(2)
6.	Gb	(2)	6.	$\sim Gb$	(2)
7.	$\sim(Fa \vee Ga)$	(4)	7.	$\sim(Fa \vee Ga)$	(4)
8.	$\sim(Fb \vee Gb)$	(4)	8.	$\sim(Fb \vee Gb)$	(4)
9.	$\sim Fa$	(7)	9.	$\sim Fa$	(7)
10.	$\sim Ga$	(7)	10.	$\sim Ga$	(7)
	×(5,9)		11.	$\sim Fb$	(8)
			12.	$\sim Gb$	(8)
				✓	

Her iki dalda da, *a* ve *b* elemanları geçtiğinden, tümel-özellemeyi hem *a* hem de *b* elemanları ile gerçekleştirdiğimize dikkat ediniz. Çözümleyici çizelgede ✓ ile gösterdiğimiz dal tamamlandığı halde açıktır. O halde, bu dala bakarak bir karşı-model oluşturalım: Dalda a ve b elemanları geçtiğinden, $S_M = \{a, b\}$ olur. *~Fa* ve *~Fb* olduğundan, $F^M = \{\}$, *~Ga* ve *~Gb* olduğundan, $G^M = \{\}$ olur. Başlangıçta kabul ettiğimiz gibi, $A^M = a$, $B^M = b$ olduğundan, $(FA \leftrightarrow GB) \rightarrow \exists x\,(Fx \vee Gx)$ önermesi için elde ettiğimiz karşı-modelin bütünü aşağıdaki gibidir:

$$M: \quad S_M = \{a, b\}, \qquad F^M = \{\ \}, \quad G^M = \{\ \}, \qquad A^M = a, \qquad B^M = b.$$

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $(FA \leftrightarrow GB) \rightarrow \forall x\,(Fx \vee Gx)$ *önermesi için bir karşı-model bulmaya çalışalım. Önermenin değilinde geçen ad sembollerini birer elemanla eşleştirerek,* $\sim((Fa \leftrightarrow Gb) \rightarrow \forall x\,(Fx \vee Gx))$ *ifadesini elde ederiz. Karşı-model oluşturmaya çalıştığımızdan, bu ifadenin çözümleyici çizelgesini oluşturalım:*

1. $\sim((Fa \leftrightarrow Gb) \rightarrow \forall x\,(Fx \vee Gx))$
2. $(Fa \leftrightarrow Gb)$ (1)
3. $\sim\forall x\,(Fx \vee Gx)$ (1)
4. $\exists x \sim(Fx \vee Gx)$ (3)

5. Fa	(2)	5. $\sim Fa$	(2)
6. Gb	(2)	6. $\sim Gb$	(2)
7. $\sim(Fc \vee Gc)$	(4)		
8. $\sim Fc$	(7)		
9. $\sim$Gc	(7)		
✓			

Tikel-özellemeyi yaparken, yeni bir eleman kullanmak gerektiğinden, *c* elemanını kullandığımıza dikkat ediniz. Çözümleyici çizelgede ✓ ile gösterdiğimiz dal tamamlandığı halde açıktır. O halde, bu dala bakarak bir karşı-model oluşturalım: Dalda *a, b* ve *c* elemanları geçmektedir. Buna göre modelin evreni $S_M = \{a, b, c\}$ olur. Dalda *Fa* ve *~Fc* geçtiğinden $a \in F^M$ ve $c \notin F^M$ olması gereklidir. *b* elemanı ne *Fb* ne de *~Fb* ifadesinde geçmediğinden, $b \notin F^M$ kabul edeceğiz. Buna göre, $F^M = \{a\}$ olur. Dalda *Gb* ve *~Gc* geçmekte, *a* elemanı ise ne *Ga* ne de *~Ga* ifadesinde geçmemektedir. Dolayısıyla, $G^M = \{b\}$. O halde, $(FA \leftrightarrow GB) \rightarrow \forall x\,(Fx \vee Gx)$ önermesi için aşağıdaki karşı-modeli elde etmiş olduk:

$$M: \quad S_M = \{a, b, c\}, \qquad F^M = \{a\}, \qquad G^M = \{b\}, \qquad A^M = a, \qquad B^M = b$$

Çözümleyici Çizelge İle Önermelerin Geçerliliğinin Denetlenmesi

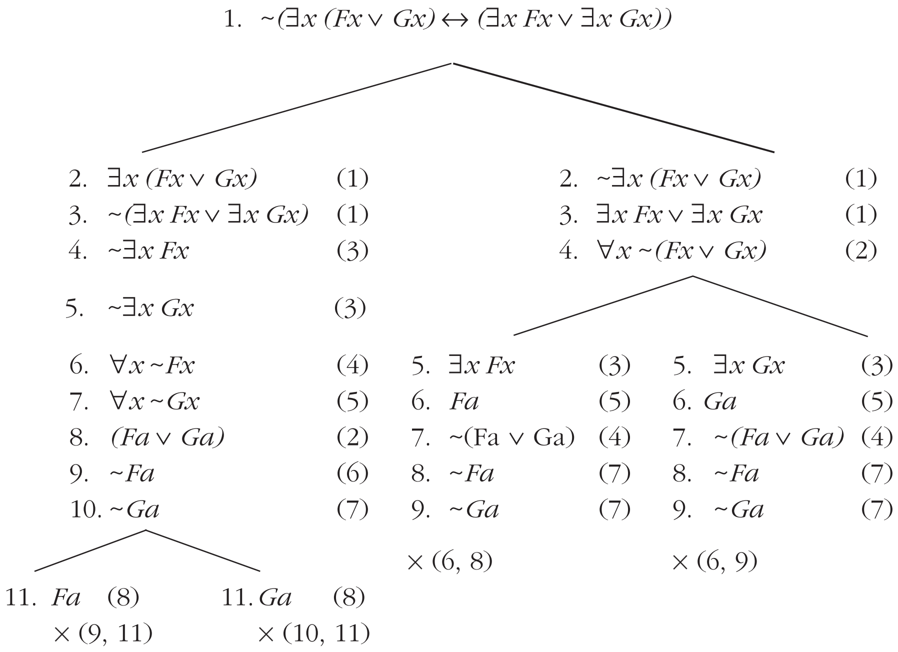
Önermeler mantığında olduğu gibi, niceleme mantığında da, bir önermenin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile ortaya koymak için, önermenin yanlış olduğu bir yorumlamanın, yani önermenin bir karşı-modelinin olmadığını göstereceğiz. Dolayısıyla, bir ***A*** nicelemeli sembolik önermesinin geçerli olduğunu göstermek için, ***~A*** önermesinin tamamlanmış çözümleyici çizelgesinin kapalı olması gerekir. Çizelgeyi olabildiğince az dallandırarak kapatmak isteyeceğimizden, çözümleyici çizelge ile geçerlilik denetlemesi yaparken, alt alta yazma kurallarının çatal açma kurallarına önceliği vardır. Ayrıca, tikel-özelleme kuralının tümel-özelleme kuralından önce uygulanması gerekir. Bunun sebebi kolayca anlaşılabilir: Önce tümel-özelleme kuralını, ardından tikel-özelleme kuralını uygularsak, tümel-özellemede kullandığımız elemanı tikel-özellemede kullanamayacağımızdan, çelişki elde edemeyiz ve çizelgeyi kapatamayız. Bu durumda tekrar bir tümel-özelleme yapmak yani çizelgeye fazladan bir nokta eklemek zorunda kalırız. Bunu örneklerde ve çözdüğünüz alıştırmalarda görebilirsiniz.

Nicelemeli bir sembolik önermenin geçerli olduğunu göstermek için, önermenin değilinin model oluşturma kurallarına göre oluşturulan tamamlanmış çözümleyici çizelgesinin kapalı olması gerekir.

Çözümleyici çizelge ile geçerlilik denetlemesi yaparken, alt alta yazma kurallarının çatal açma kurallarına, tikel-özelleme kuralının tümel-özelleme kuralına önceliği vardır.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $\exists x\,(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x\,Fx \vee \exists x\,Gx)$ *önermesinin geçerli olduğunu gösterelim. Bunun için,* $\sim(\exists x\,(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x\,Fx \vee \exists x\,Gx))$ *önermesinin çözümleyici çizelgesinin kapalı olduğunu göstermemiz gerekir:*



Gördüğünüz gibi, çözümleyici çizelgedeki tüm dallar kapandığından, $\sim(\exists x\,(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x\,Fx \vee \exists x\,Gx))$ önermesinin bir modeli yoktur. Dolayısıyla, $\exists x\,(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x\,Fx \vee \exists x\,Gx)$ önermesinin karşı-modeli yoktur yani önerme tüm modellerde doğrudur. Sonuç olarak, $\exists x\,(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x\,Fx \vee \exists x\,Gx)$ önermesi niceleme mantığında geçerlidir.

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $\exists x\,(Fx \rightarrow FA)$ *önermesinin niceleme mantığında geçerli bir önerme olduğunu gösterelim:*

1. $\sim\exists x\,(Fx \rightarrow Fa)$
2. $\forall x \sim (Fx \rightarrow Fa)$ (1)
3. $\sim (Fa \rightarrow Fa)$ (2)
4. Fa (3)
5. $\sim Fa$ (3)

×(4, 5)

ÖRNEK

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x\,Fx \rightarrow \forall x\,Gx)$ önermesinin geçerli olduğunu gösterelim:

1. $\sim(\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x\,Fx \rightarrow \forall x\,Gx))$	
2. $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	(1)
3. $\sim(\forall x\,Fx \rightarrow \forall x\,Gx)$	(1)
4. $\forall x\,Fx$	(3)
5. $\sim\forall x\,Gx$	(3)
6. $\exists x \sim Gx$	(5)
7. $\sim Ga$	(6)
8. Fa	(4)
9. $Fa \rightarrow Ga$	(2)

10. $\sim Fa$ (9)	10. Ga (9)
× (8, 10)	× (7, 10)

SIRA SİZDE 2

$\forall x\,(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\forall x\,Fx \leftrightarrow \forall x\,Gx)$ önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge yöntemiyle gösteriniz.

Çözümleyici Çizelge İle Önermelerin Eşdeğerliğinin Denetlenmesi

A ve ***B*** önermelerinin niceleme mantığı bakımından eşdeğer olması, bu iki önermenin tüm modellerde aynı doğruluk değerini almaları demektir. Bu ise, ***(A ↔ B)*** önermesinin niceleme mantığında geçerli olması demektir. Dolayısıyla, ***A*** ve ***B*** önermelerinin niceleme mantığı bakımından eşdeğer olduğunu çözümleyici çizelge yöntemi ile göstermek için **~(*A* ↔ *B*)** önermesinin çözümleyici çizelgesinin kapalı olduğunu ortaya koymamız gerekir.

A ve ***B*** önermelerinin niceleme mantığı bakımından eşdeğer olduğunu çözümleyici çizelge yöntemi ile göstermek, ***(A ↔ B)*** önermesinin niceleme mantığında geçerli olduğunu göstermek demektir.

ÖRNEK

$\sim\forall x\,Fx$ ve $\exists x \sim Fx$ önermelerinin niceleme mantığında eşdeğer olduğunu çözümleyici çizelge yöntemiyle gösterelim:

1. $\sim(\sim\forall x\,Fx \leftrightarrow \exists x \sim Fx)$

2. $\sim\forall x\,Fx$	(1)	2. $\sim\sim\forall x\,Fx$	(1)
3. $\sim\exists x \sim Fx$	(1)	3. $\exists x \sim Fx$	(1)
4. $\exists x \sim Fx$	(2)	4. $\forall x\,Fx$	(2)
5. $\forall x \sim\sim Fx$	(3)	5. $\sim Fa$	(3)
6. $\sim Fa$	(4)	6. Fa	(4)
7. $\sim\sim Fa$	(5)	× (5, 6)	
× (6, 7)			

NİCELEMELİ SEMBOLİK ÇIKARIMLAR VE ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGELER

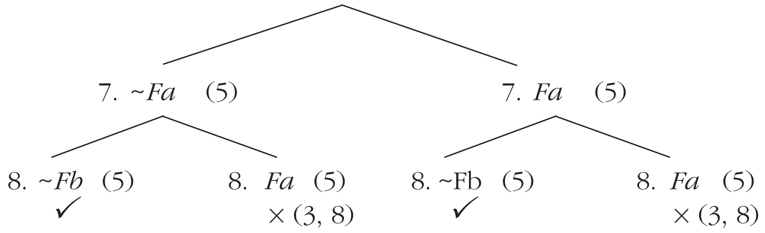
Bir çıkarımın geçersiz olması, *en az bir modelde* tüm öncüllerin doğru olmasına rağmen sonuç önermesinin yanlış olmasıdır. Bir başka deyişle, bir çıkarımın geçerli olması, bu çıkarımın öncüllerinin sonuç önermesinin değili ile birlikte tutarlı olmasıdır. Bir çıkarımın öncüllerinin sonuç önermesinin değili ile birlikte tutarlı olduğunu ortaya koyan bir model çıkarımın bir karşı-modelidir. Bir çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için, çıkarımın bir karşı-modeli olmadığını ortaya koymamız gerekir.

Çözümleyici çizelge yöntemiyle sonlu sayıda bir grup önermenin birlikte tutarlı olduğunu göstermek için, bu önermelerden ad sembolleri yerine elemanların konmasıyla elde edilen ifadeleri, kök noktasından itibaren alt alta yazar ve ardından model oluşturma kurallarına göre ilerleriz. Çizelgede tamamlanmış ve açık bir dal olması durumunda, bu dala göre bu önermeleri birlikte doğru yapan bir model oluşturabileceğimizden, bu önermeler birlikte tutarlıdır. Çizelge tamamlandığında tüm dallar kapanıyorsa, bu önermelerin tümünü doğru yapan bir model yoktur ve dolayısıyla bu önermeler birlikte çelişiktir.

ÖRNEK

∀x (Fx → FA), ∃x ~Fx ve ~FA önermelerinin birlikle tutarlı olduğunu çözümleyici çizelge yöntemiyle gösterelim:

1. $\forall x\,(Fx \rightarrow Fa)$
2. $\exists x \sim Fx$
3. $\sim Fa$
4. $\sim Fb$ (2)
5. $Fa \rightarrow Fa$ (1)
6. $Fb \rightarrow Fa$ (1)



Çizelgede ✓ ile işaretlediğimiz tamamlanmış ve açık iki daldan dolayı, *∀x (Fx → FA), ∃x ~Fx ve ~FA* önermeleri birlikte tutarlıdır.

Nicelemeli bir sembolik çıkarımın geçersiz olduğunu ortaya koyan bir karşı-modelini bulmak için, öncüller ve sonucun değilinde her *S* ad sembolü için *s* elemanını koyarak (aynı ad sembolünün çıkarımdaki her geçişi yerine aynı elemanı koymaya dikkat ederek), önermeler için model oluşturma kuralları olarak verdiğimiz (2)-(6) kurallarına göre ilerleriz. Çizelgede tüm dallar kapanırsa (yani çizelge kapanırsa) çıkarım geçerlidir. Çizelgede tamamlanmış bir açık dal kalırsa, önermeler kısmında gördüğümüz kurallara uygun olarak, çıkarımın bir karşı-modelini bu dala göre oluşturabiliriz. Çıkarımın karşı-modelini bulmaya çalışıyorsak, mümkün olduğunca fazla açık dal elde etmek için çatal açma kurallarını önce uygulamaya dikkat ederiz. Çıkarımın geçerli olduğunu, yani karşı-modeli olmadığını göstermeye çalışırken ise, alt alta yazma kurallarını önce uygularız. Hem karşı-model bulurken, hem de geçerliliği ortaya koyarken, tikel-özellemenin tümel-özellemeye önceliği vardır.

Nicelemeli bir sembolik çıkarımın geçerliliğini denetlerken, öncüllerde ve sonucun değilinde her *S* ad sembolü için *s* elemanını koyarak (aynı ad sembolünün çıkarımdaki her geçişi yerine aynı elemanı koymaya dikkat ederek), model oluşturma kurallarına göre ilerleriz. Çizelgede tüm dallar kapanırsa (yani çizelge kapanırsa) çıkarım geçerlidir.

ÖRNEK *$\forall x\,(Fx \lor Gx), \sim FA \therefore GA$ çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge yöntemiyle gösterelim.*

1. $\forall x\,(Fx \lor Gx)$	(öncül)
2. $\sim Fa$	(öncül)
3. $\sim Ga$	(sonucun değili)
4. $(Fa \lor Ga)$	(1)

5. Fa (4)	5. Ga (4)
× (2, 5)	× (3, 5)

ÖRNEK *$\forall x\,(Fx \to Gx), \forall x\,(Gx \to Hx) \therefore \forall x\,(Fx \to Hx)$ çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge yöntemiyle gösterelim:*

1. $\forall x\,(Fx \to Gx)$	(öncül)
2. $\forall x\,(Gx \to Hx)$	(öncül)
3. $\sim\forall x\,(Fx \to Hx)$	(sonucun değili)
4. $\exists x \sim(Fx \to Hx)$	(3)
5. $\sim(Fa \to Ha)$	(4)
6. Fa	(5)
7. $\sim Ha$	(5)
8. $Fa \to Ga$	(1)
9. $Ga \to Ha$	(2)

10. $\sim Fa$ (4)	10. Ga (4)	
×(6, 10)	11. $\sim Ga$ (9)	11. Ha (9)
	× (10, 11)	× (7, 11)

ÖRNEK *Çözümleyici çizelge yöntemiyle, $\exists x\,(FA \land Fx) \therefore \exists x\,Fx \to FA$ çıkarımının geçerli olduğunu gösterelim. İlk olarak, öncülde ve sonucun değilinde A ad sembolü yerine a elemanını koyarak, $\exists x\,(Fa \land Fx)$ ve $\sim(\exists x\,Fx \to Fa)$ ifadelerini elde ederiz. Şimdi bu ifadeleri tepe noktalarına yerleştirerek çıkarımın çözümleyici çizelgesini oluşturalım:*

1. $\exists x\,(Fa \land Fx)$	(öncül)
2. $\sim(\exists x\,Fx \to Fa)$	(sonucun değili)
3. $\exists x\,Fx$	(2)
4. $\sim Fa$	(2)
5. Fb	(3)
6. $(Fa \land Fc)$	(1)
7. Fa	(6)
8. Fc	(6)
×(4, 7)	

Çizelge kapandığı için (yani çizelgedeki tüm dallar kapandığı için), çıkarımın karşı-modeli yoktur. Dolayısıyla çıkarım geçerlidir.

ÖRNEK

$\exists x\, Fx \therefore \forall x\, Fx$ çıkarımının geçersiz olduğunu çözümleyici çizelge yöntemiyle gösterelim.

1.	$\exists x\, Fx$	(öncül)
2.	$\sim\forall x\, Fx$	(sonucun değili)
3.	$\exists x \sim Fx$	(2)
4.	Fa	(1)
5.	$\sim Fb$	(3)
	✓	

Çizelgeyi oluşturan tek dal tamamlandığı halde açık kaldığından, bu dala bakarak çıkarım için bir karşı-model yazılabilir. Dikkat ediniz: 5. noktada 3 noktasından *a* elemanı ile tikel-özelleme yapabilseydik çizelge kapanırdı. Ancak, yeni bir harf kullanmamız zorunlu olduğundan bunu yapamayız. Aynı sebeple, 6. nokta olarak, 1. noktaya dönüp *b* ile tikel-özelleme de yapamayız. Dolayısıyla çizelgenin açık kalması zorunludur. Bu daldan oluşturulacak karşı-model aşağıdaki gibidir:

M: $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$

ÖRNEK

$\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx \therefore \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ çıkarımının geçersiz olduğunu çözümleyici çizelge ile bir karşı-model oluşturarak gösterelim:

1.	$\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx$	(öncül)
2.	$\sim\exists x\, (Fx \wedge Gx)$	(sonucun değili)
3.	$\forall x \sim(Fx \wedge Gx)$	(2)
4.	$\exists x\, Fx$	(1)
5.	$\exists x\, Gx$	(1)
6.	Fa	(4)
7.	Gb	(5)
8.	$\sim(Fa \wedge Ga)$	(3)
9.	$\sim(Fb \wedge Gb)$	(3)

10. $\sim Fa$ (8)
×(6,10)

10. $\sim Ga$ (8)

11.	$\sim Fb$	(9)
12.	Fc	(4)
13.	Gd	(5)
14.	$\sim(Fc \wedge Gc)$	(3)
15.	$\sim(Fd \wedge Gd)$	(3)
	⋮	

11. $\sim Gb$ (9)
×(7,11)

Görüldüğü gibi, çizelgenin bir dalını kapatma imkanı olmadığından çıkarım geçersizdir. Bu açık dala bakarak çıkarımın bir karşı modelini oluşturabiliriz. Aslında, karşı-modeli dalın ilk 11 noktasına bakarak oluşturabiliriz:

$$M: \quad S_M = \{a,\ b\}, \qquad F^M = \{a\}, \qquad G^M = \{b\}$$

SIRA SİZDE 3

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, M: $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{b\}$ modelinde $\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx$ ve $\exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermelerinin doğruluk değerlerini hesaplayarak, M modelinin çıkarımın karşı-modeli olduğunu gösteriniz.

Özet

Çözümleyici çizelge yöntemi ile nicelemeli sembolik önermeleri denetleyebilmek,

Çözümleyici çizelge sembolik bir nicelemeli önermenin bir modeldeki doğruluk değerini hesaplarken, *tümel-nicelemenin açılımı, tikel-nicelemenin açılımı, tümel-niceleyicinin değillenmesi* ve *tikel-niceleyicinin değillenmesi* kurallarına başvurulur.

Nicelemeli bir sembolik önermenin verilen bir modeldeki doğruluk değerini çözümleyici çizelge yöntemi ile hesaplarken, ilk olarak, önermede geçen ad sembolleri yerine, bunların modelde karşılığı olarak verilen elemanları yazarak elde ettiğimiz ifadeyi, çözümleyici çizelgenin 1 numaralı kök noktasına yazarız. Ardından tümel ve tikel-nicelemenin açılımı kurallarını, niceleyici değilleme kurallarını ve önerme eklemlerine ait çözümleyici çizelge kurallarını kullanarak ilerleriz. Bir dalda ilerlerken, ***Y*** bir yüklem sembolü, *s* modelin evreninin bir elemanı olmak üzere ***Ys*** veya ***~Ys*** biçimindeki bir ifade ortaya çıktığında;

- Modelde $s \in Y^M$ ise, dalda ortaya çıkan ***Ys*** ifadesi doğrudur ve o dalda ilerlemeye devam ederiz.
- Modelde $s \notin Y^M$ ise, dalda ortaya çıkan ***~Ys*** ifadesi doğrudur ve yine o dalda ilerlemeye devam edebiliriz.
- Modelde $s \notin Y^M$ ise, dalda ortaya çıkan ***Ys*** ifadesi yanlıştır ve o dalda daha fazla ilerlemeden, dalın sonuna bir × (çarpı) işareti koyarız ve bu dalın "yanlış" bir dal olduğunu söyleriz.
- Modelde $s \in Y^M$ ise, dalda ortaya çıkan ***~Ys*** ifadesi yanlıştır ve o dalda daha fazla ilerlemeden, dalın sonuna bir × (çarpı) işareti koyarız ve bu dalın "yanlış" bir dal olduğunu söyleriz.

Çizelgedeki bir dalda işlem uygulanacak bir ifade kalmadığı halde, o daldaki tüm ***Ys*** ve ***~Ys*** ifadeleri doğru ise, o dal "doğru" bir daldır. Çizelgede en az bir doğru dal ortaya çıkarsa, tamamlanmamış dallar kalmış olsa bile, önermenin bize verilen modelde doğru olduğunu söyleyebiliriz. Çizelgede tüm dallar yanlış ise, önerme bize verilen modelde yanlıştır.

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, nicelemeli bir sembolik önermenin bir modeldeki doğruluk değerini hesaplarken, başvurulması zorunlu olmayan ama çizelgeyi olabildiğince basit tutmak ve böylece hata yapmaktan kaçınmak için "öncelik kuralları" izlenir.

Çözümleyici çizelge yöntemi ile, nicelemeli bir sembolik önermenin modelini oluştururken, açılım kuralları yerine, *tümel-özelleme* ve *tikel-özelleme* kurallarına başvurulur. Çözümleyici çizelge yöntemi ile, nicelemeli bir sembolik önerme için bir model bulmak için,

1. Önermede her *S* ad sembolü yerine *s* elemanını yazarız: *A* yerine *a*, *B* yerine *b*, ... gibi. Bir ad sembolünün her geçtiği yere aynı eleman konmalıdır.
2. 1 numaralı kök noktasına elde ettiğimiz ifadeyi yazarız.
3. Tümel-özelleme ve tikel-özelleme kurallarını, tümel ve tikel-nicelemelerin değillenmesi kurallarını ve önerme eklemlerine ait kuralları uygulayarak ilerleriz. Burada özellikle dikkat etmemiz gereken nokta şudur: Dalda ortaya çıkan *her eleman için* o daldaki her ∀ν ***A*** ifadesine tümel-özelleme kuralı uygulanmalıdır. Bir ∀ν ***A*** ifadesine tümel-özelleme kuralı uygulandıktan sonra da dalda yeni bir eleman ortaya çıkarsa, ∀ν ***A*** ifadesine o eleman için de tümel-özelleme kuralı uygulanmalıdır.
4. Bir dalda ilerlerken, bir ifade ve onun değili ortaya çıkarsa o dal *kapalıdır* ve bu durum o dalın, sonuna × (çarpı) işareti konarak kapanmasıyla belirtilir.
5. İşlem uygulanacak bir ifade kalmadığı halde kapanmayan bir dal *açık* bir daldır. Bu durum o dalın sonuna bir ✓ işareti konarak gösterilir.
6. Bir önermenin çözümleyici çizelgesinde *tamamlanmış* (işlem uygulanacak bir ifade kalmamış dal) bir *açık* dal (bir ifade ve onun değilini bulundurmayan bir dal) ortaya çıkarsa, bu dallardan herhangi birine göre önermenin bir modeli oluşturulabilir: Modelin evreni o dalda ortaya çıkan elemanlardan oluşmalıdır. Ad sembolleri, ilk aşamada yerlerine konan elemanlarla eşleştirilir: $A^M = a$, $B^M = b$, … Yüklem sembollerinin yorumlanmasında, o dalda ortaya çıkan ***Ys*** ve ***~Ys*** biçimindeki ifadelere bakılır. Dalda bir ***Ys*** ifa-

desi varsa modelde $s \in \boldsymbol{Y}^M$ olmalı, $\sim\boldsymbol{Y}s$ ifadesi varsa modelde $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ olmalıdır. Dalda ortaya çıkmış bir eleman ne $\boldsymbol{Y}s$ ne de $\sim\boldsymbol{Y}s$ ifadesinde ortaya çıkmamış ise, bu $\boldsymbol{Y}$ yüklemi için $s \in \boldsymbol{Y}^M$ veya $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ olarak karar verebiliriz. Böyle bir durum ortaya çıktığında, modeli basit tutmak için $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ seçeceğiz. Bu zorunlu değildir. $s \notin \boldsymbol{Y}^M$ olmasının zorunlu olduğu tek durum, modeli kendisine göre oluşturduğumuz açık dalda $\sim\boldsymbol{Y}s$ ifadesinin olmasıdır.

Çözümleyici çizelge ile model oluşturmaya çalışırken, olabildiğince fazla dal elde etmeye çalıştığımızdan, çatal açma kurallarının alt alta yazma kurallarına önceliği vardır. Ayrıca, tikel-özelleme kuralı tümel-özelleme kuralından önce uygulanmalıdır.

Nicelemeli bir $\boldsymbol{A}$ sembolik önermesinin bir karşı-modelini oluşturmak demek $\sim\boldsymbol{A}$ önermesinin bir modelini oluşturmak demektir. Dolayısıyla, çözümleyici çizelge yöntemi ile $\boldsymbol{A}$ önermesinin bir karşı-modelini oluşturmak için, $\sim\boldsymbol{A}$ önermesinde her S ad sembolü yerine s elemanını koyarak elde ettiğimiz ifadeyi 1. numaralı kök noktasına koyarak çizelgeyi oluşturmaya başlar ve model oluştururken belirttiğimiz (3)-(6) kurallarını aynen uygularız.

Önermeler mantığında olduğu gibi, niceleme mantığında da, bir önermenin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile ortaya koymak için, önermenin yanlış olduğu bir yorumlamanın, yani önermenin bir karşı-modelinin olmadığını gösteririz. Dolayısıyla, bir $\boldsymbol{A}$ nicelemeli sembolik önermesinin geçerli olduğunu göstermek için, $\sim\boldsymbol{A}$ önermesinin tamamlanmış çözümleyici çizelgesinin kapalı olması gerekir. Çizelgeyi olabildiğince az dallandırarak kapatmak isteyeceğimizden, çözümleyici çizelge ile geçerlilik denetlemesi yaparken, alt alta yazma kurallarının çatal açma kurallarına önceliği vardır. Ayrıca, tikel-özelleme kuralının tümel-özelleme kuralından önce uygulanması gerekir.

Herhangi iki $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ nicelemeli sembolik önermesinin niceleme mantığı bakımından eşdeğer olduğunu çözümleyici çizelge yöntemi ile göstermek için $\sim(\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B})$ önermesinin çözümleyici çizelgesinin kapalı olduğunu ortaya koymamız gerekir.

Çözümleyici çizelge yöntemi ile nicelemeli sembolik çıkarımları denetleyebilmek,

Bir çıkarımın geçersiz olması, *en az bir modelde* tüm öncüllerin doğru olmasına rağmen sonuç önermesinin yanlış olmasıdır. Bir başka deyişle, bir çıkarımın geçerli olması, bu çıkarımın öncüllerinin sonuç önermesinin değili ile birlikte tutarlı olmasıdır. Bir çıkarımın öncüllerinin sonuç önermesinin değili ile birlikte tutarlı olduğunu ortaya koyan bir model çıkarımın bir karşı-modelidir. Bir çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için, çıkarımın bir karşı-modeli olmadığını ortaya koymamız gerekir.

Çözümleyici çizelge yöntemiyle sonlu sayıda bir grup önermenin birlikte tutarlı olduğunu göstermek için, bu önermelerden ad sembolleri yerine elemanların konmasıyla elde edilen ifadeleri, kök noktasından itibaren alt alta yazar ve ardından model oluşturma kurallarına göre ilerleriz. Çizelgede tamamlanmış ve açık bir dal olması durumunda, bu dala göre bu önermeleri birlikte doğru yapan bir model oluşturabileceğimizden, bu önermeler birlikte tutarlıdır. Çizelge tamamlandığında tüm dallar kapanıyorsa, bu önermelerin tümünü doğru yapan bir model yoktur ve dolayısıyla bu önermeler birlikte çelişiktir.

Nicelemeli bir sembolik çıkarımın geçersiz olduğunu ortaya koyan bir karşı-modelini bulmak için, öncüller ve sonucun değilinde her S ad sembolü için s elemanını koyarak (aynı ad sembolünün çıkarımdaki her geçişi yerine aynı elemanı koymaya dikkat ederek), önermeler için model oluşturma kuralları olarak verdiğimiz (2)-(6) kurallarına göre ilerleriz. Çizelgede tüm dallar kapanırsa (yani çizelge kapanırsa) çıkarım geçerlidir. Çizelgede tamamlanmış bir açık dal kalırsa, önermeler kısmında gördüğümüz kurallara uygun olarak, çıkarımın bir karşı-modelini bu dala göre oluşturabiliriz. Çıkarımın karşı-modelini bulmaya çalışıyorsak, mümkün olduğunca fazla açık dal elde etmek için çatal açma kurallarını önce uygulamaya dikkat ederiz. Çıkarımın geçerli olduğunu, yani karşı-modeli olmadığını göstermeye çalışırken ise, alt alta yazma kurallarını önce uygularız. Hem karşı-model bulurken, hem de geçerliliği ortaya koyarken, tikel-özellemenin tümel-özellemeye önceliği vardır.

Kendimizi Sınayalım

1. $\sim\exists x\,(Fx \rightarrow \forall y\, Gy)$
2. $\forall x \sim (Fx \rightarrow \forall y\, Gy)$
3. $\sim(Fa \rightarrow \forall y\, Gy)$
4. Fa
5. ?

1. $\exists x\,(Fx \rightarrow \forall y\, Gy)$ önermesi için karşı-model oluşturmak için, çizelgedeki soru işaretli noktaya aşağıdaki formüllerden hangisi gelmelidir?

a. Ga
b. Gb
c. $\exists y\, Gy$
d. $\forall y\, Gy$
e. $\sim\forall y\, Gy$

2. $\forall x\,(\forall y\, Gy \rightarrow Fx)$ önermesinin, evreni $\{a, b\}$ olan bir modelde doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplarken, çizelgedeki **ilk** noktalara hangi formüller gelmelidir?

a. 1. $\forall x\,(\forall y\, Gy \rightarrow Fx)$
   2. $(Ga \rightarrow Fx)$
   3. $(Gb \rightarrow Fx)$
b. 1. $\forall x\,(\forall y\, Gy \rightarrow Fx)$
   2. $\sim\forall y\, Gy$
   3. Fx
c. 1. $\forall x\,(\forall y\, Gy \rightarrow Fx)$
   2. $\forall y\, Gy$
   3. $\sim Fx$
d. 1. $\forall x\,(\forall y\, Gy \rightarrow Fx)$
   2. $(\forall y\, Gy \rightarrow Fa)$
   3. $(\forall y\, Gy \rightarrow Fb)$
e. 1. $\forall x\,(\forall y\, Gy \rightarrow Fx)$
   2. $(\forall y\, Gy \rightarrow Fx)$
   3. $\sim(\forall y\, Gy \rightarrow Fx)$

1. $\exists x\,(Fx \wedge \exists y\, Gy)$
2. $(Fa \wedge \exists y\, Gy)$
3. Fa
4. $\exists y\, Gy$
5. ?

3. $\exists x\,(Fx \wedge \exists y\, Gy)$ önermesinin modeli oluşturulan yukarıdaki çizelgede, soru işaretli yere aşağıdaki formüllerden hangisi **gelemez?**

a. Ga
b. Gb
c. Gc
d. Gd
e. Ge

4. $(FA \wedge \exists y\,(Gy \wedge GB))$ önermesine çözümleyici çizelge ile model oluştururken, çizelgenin kök noktasına (1 numaralı nokta) aşağıdaki ifadelerden hangisi yazılmalıdır?

a. $(Fx \wedge \exists y\,(Gy \wedge Gy))$
b. $(FA \wedge \exists y\,(Gy \wedge GA))$
c. $(FB \wedge \exists y\,(Gy \wedge GB))$
d. $(Fa \wedge \exists y\,(Gy \wedge Gb))$
e. $\sim(FA \wedge \exists y\,(Gy \wedge GB))$

1. ***A***
⋮
k. Fa
k+1 $\sim Ga$
k+2 $\sim Gb$
k+3 Gc
✓

5. Yukarıdaki çizelgeye göre, aşağıdaki modellerden hangisi ***A*** önermesinin bir modelidir?

a. M: $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{\ \}$, $G^M = \{a, b\}$
b. M: $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{\ \}$, $G^M = \{c\}$
c. M: $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{c\}$
d. M: $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a, b\}$
e. M: $S_M = \{a, b, c\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a, b, c\}$

6. Çözümleyici çizelge ile nicelemeli bir sembolik önermenin geçerli olduğunu göstermek için yapılması gereken aşağıdakilerden hangisidir?

a. Kök noktasına önermeyi yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
b. Kök noktasına önermenin değili yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
c. Önermenin değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeyi kök noktasına yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
d. Önermenin değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeyi kök noktasına yazarak oluşturulan çizelgede tüm dallar kapanmalıdır.
e. Önermenin değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeyi kök noktasına yazarak oluşturulan çizelgede tüm dallar açık olmalıdır.

7. Çözümleyici çizelge ile nicelemeli bir sembolik çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için yapılması gereken aşağıdakilerden hangisidir?

a. Kök noktasından başlayarak, çıkarımı oluşturan önermeleri yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
b. Kök noktasından başlayarak, çıkarımı oluşturan önermelerin değilleri yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
c. Kök noktasından başlayarak, öncüllerde ve sonucun değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeleri yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
d. Kök noktasından başlayarak, öncüllerde ve sonucun değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeleri yazarak oluşturulan çizelgede tüm dallar açık olmalıdır.
e. Kök noktasından başlayarak, öncüllerde ve sonucun değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeleri yazarak oluşturulan çizelgede tüm dallar kapanmalıdır.

8. Çözümleyici çizelge ile nicelemeli bir sembolik çıkarımın **geçersiz** olduğunu göstermek için yapılması gereken aşağıdakilerden hangisidir?

a. Kök noktasından başlayarak çıkarımı oluşturan önermeleri yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
b. Kök noktasından başlayarak, çıkarımı oluşturan önermelerin değilleri yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
c. Kök noktasından başlayarak, öncüllerde ve sonucun değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeleri yazarak oluşturulan çizelgede en az bir açık dal olmalıdır.
d. Kök noktasından başlayarak, öncüllerde ve sonucun değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeleri yazarak oluşturulan çizelgede tüm dallar açık olmalıdır.
e. Kök noktasından başlayarak, öncüllerde ve sonucun değilinde ad sembolleri yerine birer eleman yazarak oluşturulan ifadeleri yazarak oluşturulan çizelgede tüm dallar kapanmalıdır.

9. Çözümleyici çizelge yönteminde öncelik kuralları ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

a. Çözümleyici çizelge yöntemi ile önermeler için model oluştururken tümel-özelleme kuralının tikel-özellemeye önceliği vardır.
b. Çözümleyici çizelge yöntemi ile önermelerin geçerliliğini denetlerken tümel-özelleme kuralının tikel-özellemeye önceliği vardır.
c. Çözümleyici çizelge yöntemi ile önermelerin geçerliliğini denetlerken tikel-evetleme kuralının tikel-özellemeye önceliği vardır.
d. Çözümleyici çizelge yöntemi ile önermelerin geçerliliğini denetlerken tümel-özelleme kuralının tümel-evetlemeye önceliği vardır.
e. Çözümleyici çizelge yöntemi ile önermelerin geçerliliğini denetlerken tikel-özelleme kuralının tümel-özellemeye önceliği vardır.

10. Çözümleyici çizelge yönteminde öncelik kuralları ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

a. Çözümleyici çizelge yöntemi ile doğruluk değeri denetlemesinde tümel-nicelemenin açılımı kuralının tikel-nicelemenin açılımı kuralına önceliği vardır.
b. Çözümleyici çizelge yöntemi ile doğruluk değeri denetlemesinde tikel-nicelemenin açılımı kuralının tümel-nicelemenin açılımı kuralına önceliği vardır.
c. Çözümleyici çizelge yöntemi ile doğruluk değeri denetlemesinde tikel-evetleme kuralının tümel-evetlemeye önceliği vardır.
d. Çözümleyici çizelge yöntemi ile doğruluk değeri denetlemesinde tümel-evetlemenin değillenmesi kuralının tümel-evetlemeye önceliği vardır.
e. Çözümleyici çizelge yöntemi ile doğruluk değeri denetlemesinde tümel-evetlemenin değillenmesi kuralının tikel-evetlemenin değillenmesi kuralına önceliği vardır.

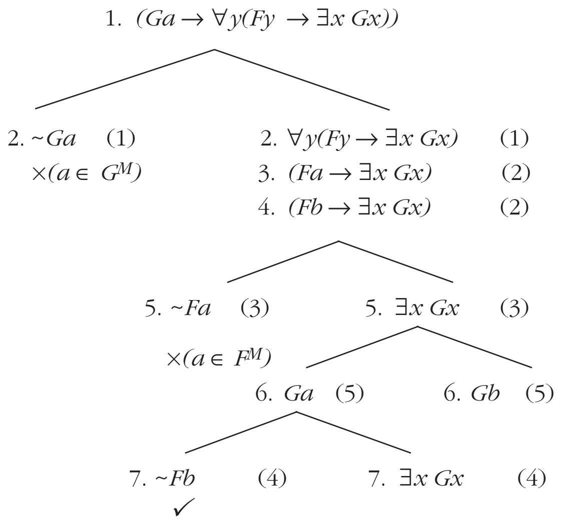
Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Önermeler ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
2. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Önermeler ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
3. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Önermeler ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
4. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Önermeler ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
5. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Önermeler ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
6. d	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Önermeler ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
7. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Çıkarımlar ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
8. c	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Çıkarımlar ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
9. e	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Önermeler ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.
10. a	Yanıtınız doğru değilse, ünitenin "Nicelemeli Sembolik Önermeler ve Çözümleyici Çizelgeler" konusuna bakınız.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra sizde 1

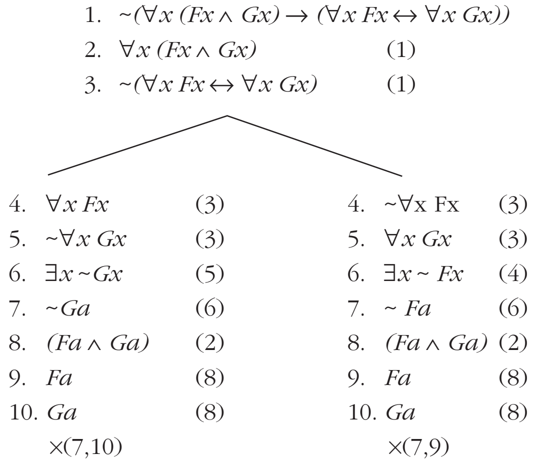
Çözümleyici çizelge yöntemi ile, $(GA \rightarrow \forall y(Fy \rightarrow \exists x\, Gx))$ önermesinin $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{a, b\}$, $A^M = a$ modelindeki doğruluk değerini hesaplayalım:



Çizelgede ✓ ile işaretlediğimiz dal tamamlanmış bir doğru dal olduğundan, diğer dallara devam etmeden $(GA \rightarrow \forall y(Fy \rightarrow \exists x\, Gx))$ önermesinin bize verilen modelde doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Sıra sizde 2

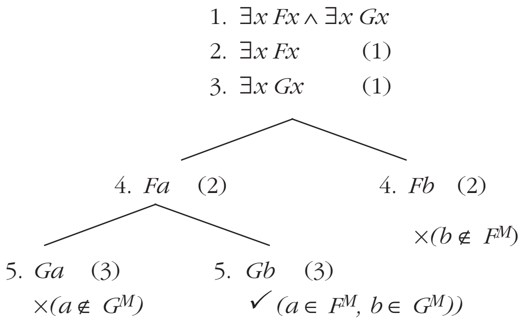
$\forall x\,(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\forall x\, Fx \leftrightarrow \forall x\, Gx)$ önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge yöntemiyle gösterelim:



Çizelgede tüm dallar kapandığından, $\forall x\,(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\forall x\, Fx \leftrightarrow \forall x\, Gx)$ önermesi geçerlidir. Sağdaki dalda *a* elemanını kullandığımıza dikkat ediniz. *Bu dalda a* elemanı geçmediğinden, *istersek,* bu dalda da tikel-özellemede *a* elemanını kullanabiliriz. Tikel-özelleme kuralındaki sınırlamayı değerlendirirken her dal ayrı değerlendirilir. Bir dalda bir eleman çıktıktan itibaren, artık o dalda tikel-özellemede kullanılamaz.

Sıra sizde 3

Çözümleyici çizelge yöntemiyle, M: $S_M = \{a, b\}$, $F^M = \{a\}$, $G^M = \{b\}$ modelinde $\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx$ *ve* $\exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermelerinin doğruluk değerlerini hesaplayalım:



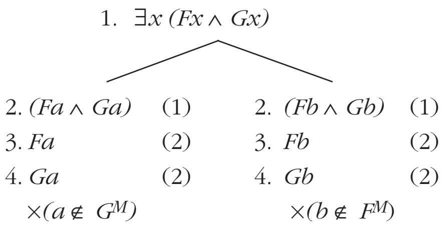
1. $\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx$
2. $\exists x\, Fx$ (1)
3. $\exists x\, Gx$ (1)

4. Fa (2) 4. Fb (2)

$\times (b \notin F^M)$

5. Ga (3) 5. Gb (3)

$\times (a \notin G^M)$ $\checkmark\, (a \in F^M,\ b \in G^M))$



1. $\exists x\, (Fx \wedge Gx)$

2. $(Fa \wedge Ga)$ (1) 2. $(Fb \wedge Gb)$ (1)

3. Fa (2) 3. Fb (2)

4. Ga (2) 4. Gb (2)

$\times (a \notin G^M)$ $\times (b \notin F^M)$

Sonuç olarak, verilen modelde $\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx$ önermesi doğru ancak $\exists x\, (Fx \wedge Gx)$ önermesi yanlıştır. Dolayısıyla, verilen model $\exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx \therefore \exists x\, (Fx \wedge Gx)$ çıkarımının bir karşı-modelidir.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Grünberg, T. (2000). **Sembolik Mantık El Kitabı.** (3 Cilt). Ankara: METU Press.

Grünberg, T. Ve Onart, A. vd. (2003). **Mantık Terimleri Sözlüğü.** Ankara: METU Press.

Kalish, D., Montague, R. ve Mar, G. (1980). **Logic: Techniques of Formal Reasoning.** 2. Baskı. New York: Oxford University Press.

Ural, Ş. (1995). **Temel Mantık.** İstanbul: Çantay Kitabevi.

Yıldırım, C. (1976). **100 Soruda Mantık El Kitabı.** İstanbul: Gerçek Yayınevi.

Yıldırım, C. (1999). **Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi.** İstanbul: Bilgi Yayınevi.

Sözlük

A

Açık Formül: Niceleme mantığının sembolik dilinde en az bir değişkeni serbest olan formül.

B

Bağlı Değişken: Sembolik bir nicelemeli önermede bir $\forall v$ veya $\exists v$ nicelemesinin etki alanındaki v değişkeni.

Basit Önerme: Başka önermelerden türetilmemiş olan önerme.

Bileşik Önerme: En az bir başka önermeden türetilmiş olan önerme.

Ç

Çelişme: Tüm yorumlamalarda “yanlış” doğruluk değerini alan önerme.

Çözümleyici Çizelge: Önermelerin doğruluk değerini hesaplamak, önerme ve çıkarımlar için model ve karşı-model oluşturmak, önerme ve çıkarımların geçerliliğini denetlemek için kullanılan çizge (grafik).

Çeviri Anahtarı: Gündelik dile çevirme işlemini gerçekleştirirken başvurulan, önerme değişkenlerinin, ad ve yüklem sembollerinin gündelik dilde karşılığı olan basit önerme, ad ve yüklemleri belirten çizelge.

Çıkarım: Öncül önermeleri ve sonuçtan oluşan bir önermeler dizisi. Bir veya daha fazla sayıda önermeden hareketle bir başka önermeye ulaşmak bir *çıkarımda bulunmak*tır. Bir çıkarımda bulunduğumuzda ulaştığımız önerme *sonuç* önermesi, sonuç önermesine ulaşmak için dayanak olarak gösterdiğimiz önermeler *öncül önermeler* veya kısaca *öncüller*dir.

D

Doğruluk Fonksiyonu: Bir doğrusal önerme eklemine karşılık gelen fonksiyon.

Doğruluk Değerlemesi: Her önerme değişkenine bir doğruluk değeri atayan bir fonksiyon. Bir önerme veya çıkarımı denetlemek için sadece bu önerme veya çıkarımda geçen önerme değişkenlerinin doğruluk değerlerini bilmek yeterli olduğundan, bir önerme veya çıkarım için bir doğruluk değerlemesi, bu önerme veya çıkarımda geçen her önerme değişkenine bir doğruluk değeri atanmasından ibarettir.

Doğruluk Tablosu: Bir önerme için her doğruluk değerlemesinde o önermenin aldığı doğruluk değerini gösteren tablo. Bir çıkarım için her doğruluk değerlemesinde o çıkarımı oluşturan önermelerin aldığı doğruluk değerlerini gösteren tablo.

Doğrusal Açılım: Nicelemeli bir sembolik önermede geçen tüm nicelemelerin bir kümeye göre elenmesiyle elde edilen ifade.

E

Eşdeğerlik: İki önermenin her yorumlamada aynı doğruluk değerlerini alması durumu. *A* ve *B* önermelerinin eşdeğer önermeler olduğu, $A \equiv B$ biçiminde gösterilir.

G

Geçerlilik: (Çıkarımlar için) Bir çıkarımda öncüllerin tümünün doğru olması durumunda sonuç önermesinin yanlış olamaması durumu. (Önermeler için) Bir önermenin hiçbir yorumlamada yanlış değerini almaması durumu.

Gündelik Dile Çeviri: Bir mantık sisteminin sembolik dilindeki bir sembolik önermenin veya çıkarımın, gündelik dilde ifade ettiği bir gündelik dil önermesini veya çıkarımını oluşturma.

H

Heptengitme: Öncül önermelerinin tümünün doğru olması durumunu en iyi açıklayan önermeye sonuç önermesi olarak ulaşmaya çalıştığımız akıl yürütme türü.

İ

İçerme: Bir grup önermenin “doğru” değerini aldığı her durumda bir diğer önermenin de “doğru” değerini alması durumu. *A, B, C,…* önermelerinin *Ö* önermesini içermesi durumu

A, B, C,… Ö biçiminde gösterilir.

K

Kapalı Formül: Niceleme mantığının sembolik dilinde hiçbir serbest değişkeni olmayan formül. Önerme.

Kategorik Önerme: “Her *F G* dir”, “Hiçbir *F G* değildir”, “Bazı *F* ler *G* dir”, “Bazı *F* ler *G* değildir” biçimindeki önermeler.

M

Mantık: Düzgün akıl yürütme biçimlerini ortaya koymaya ve akıl yürütmelerin düzgün olup olmadığını sınamamızı sağlayacak yöntemler geliştirmeye çalışan analitik bilim.

Model: Boş-olmayan bir küme, her yüklem sembolü için bu kümenin bir alt-kümesi, her ad sembolü için bu kümenin bir elemanından oluşan bir yapı.

N

Niceleyici: Niceleme mantığının sembolik dilinde kullanılan $\forall$ ve $\exists$ sembollerinin her biri. $\forall$ "tümel-niceleyici" olarak adlandırılır ve gündelik dildeki "her" niceleme ifadesinin karşılığıdır, $\exists$ ise "tikel-niceleyici" olarak adlandırılır ve gündelik dildeki "bazı" ifadesinin karşılığıdır. Niceleyiciler değişkenlerle birlikte nicelemeleri oluştururlar.

O-Ö

Olumsal Önerme: En az bir yorumlamada "Doğru" ve en az bir yorumlamada "Yanlış" doğruluk değerini alan önerme.

Önerme: Anlamlı ve kesin yargı bildiren bildirsel tümce. Diğer tümce türlerinden farklı olarak, önermeler "doğru" ve "yanlış" doğruluk değerlerini alan ve çıkarımları oluşturan tümcelerdir.

Önerme Eklemi: Önermelere uygulanarak daha karmaşık önermeler elde etmemizi sağlayan ifade. En yaygın olarak kullanılan önerme eklemlerinden bazıları, "değil", "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak", "zorunludur", "olanaklıdır" ifadeleridir. Bir önerme eklemini kullanarak elde edilmiş bileşik önermenin doğruluk değeri sadece bileşenlerin doğruluk değerine göre belirlenebiliyorsa o önerme eklemi doğrusal bir önerme eklemidir.

Ön-Nicelemeli Normal Biçim: Niceleme mantığında, başta bir dizi niceleme ve ardından niceleyici geçmeyen bir matristen oluşan bir formül. Her formül bu biçimde bir formüle eşdeğerdir. Bir formülün eşdeğeri olan ön-nicelemeli normal biçimdeki formüle, bu formülün "ön-nicelemeli normal biçimi" adı verilir. Ön-nicelemeli biçimde bir formül, her bir Q_i tümel veya tikel-niceleyici, her bir v_i bir değişken ve P içinde hiçbir niceleyici geçmeyen bir formül olmak üzere $Q_1v_1Q_2v_2...Q_nv_n\, P$ biçimindedir.

S

Sembolleştirme: Bir gündelik önerme veya çıkarımının bir mantık sisteminin sembolik dilindeki karşılığını oluşturma işlemi.

Sembolleştirme Anahtarı: Sembolleştirme işlemini gerçekleştirirken başvurulan, basit önerme, ad ve yüklemlerin karşılığı olan, önerme değişkenlerini, ad ve yüklem sembollerini belirten çizelge.

Serbest değişken: Sembolik bir nicelemeli önermede hiçbir $\forall v$ veya $\exists v$ nicelemesinin etki alanında olmayan v değişkeni.

T

Totoloji: Önermeler mantığında geçerli olan önerme. Tüm doğruluk değerlemelerinde "doğru" doğruluk değerini alan önerme.

Tümdengelim: Doğru öncüllerden yola çıktığımızda bizi mutlaka doğru sonuçlara ulaştıracağından emin olacağımız çıkarım biçimlerine göre akıl yürütme türü.

Tutarlılık: Bir grup önermenin tümünün aynı yorumlamada doğru olabilmesi durumu.

Tümevarım: Öncüllerin doğru olması durumunda, doğru olma olasılığı yüksek olan sonuç önermelerine ulaşmaya çalıştığımız akıl yürütme türü.

Y

Yüklem İfadesi: Niceleme mantığında çeviri ve sembolleştirme aşamalarında yardımcı olarak kullandığımız yapay bir ifade türü. "***Y***" yüklemine ait yüklem ifadesi {a ***Y*** dir} ifadesi.